



Anais do Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional e da Semana da Matemática



ISBN
978-85-8215-086-3

22, 23 e 24 de novembro de 2018

Universidade Federal do Espírito Santo, Campus São Mateus



Patrocínio/Apoio:



UNIVERSIDADE FEDERAL
DO ESPÍRITO SANTO
Campus São Mateus



Anais

Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - ERMAC
Semana da Matemática

UFES, campus São Mateus
2018

Apresentação

Estes anais reúnem os trabalhos selecionados pelo Comitê Científico e apresentados no Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional – ERMAC / Semana da Matemática, ocorrido na Universidade Federal do Espírito Santo, campus São Mateus, em 2018. Trazem ainda o resumo das palestras e minicursos.

Comitê Organizador do Evento

André Pizzaia Butta (UFES)

Andressa Cesana (UFES)

Arildo Castelluber (UFES)

Fernanda Capucho Cezana (IFES)

Isaac Pinheiro dos Santos (UFES)

Jocitiel Dias da Silva (Faculdade Vale do Cricaré - FVC)

Julio Cezar de Souza Almeida (UFES)

Leonardo Delarmelina Secchin (UFES)

Moysés Gonçalves Siqueira Filho (UFES)

Riedson Baptista (UFES)

Sandra Mara Cardoso Malta (LNCC)

Valdinei Cezar Cardoso (UFES)

Comitê Científico

Andressa Cesana (UFES)

Cristiane Oliveira de Faria (UERJ)

Fernanda Capucho Cezana (IFES)

Gilberto de Miranda Junior (UFES)

Isaac Pinheiro dos Santos (UFES)

Júlio Cezar de Souza Almeida (UFES)

Leonardo Delarmelina Secchin (UFES)

Luciano Lessa Lorenzoni (IFES)

Lucia Catabriga (UFES)

Moysés Gonçalves Siqueira Filho (UFES)

Valdinei Cezar Cardoso (UFES)

Wellington Piveta Oliveira (UEM)

Werley Gomes Facco (IFES)

Sumário

Resumo das Palestras

Minicursos

Apresentações Orais

CC01 - MLPG2 COM MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS APLICADO A PROTEÇÃO CATÓDICA

Samuel Berger Velten, Edmundo Guimarães de Araujo Costa, Jose Antonio Fontes Santiago, Wilian Jerônimo Santos, Jose Claudio de Faria Telles

CC02 - ESTRATIFICAÇÃO DO SOLO PARA PROJETOS DE ATERRAMENTO ELÉTRICO UTILIZANDO EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

Paulo Victor de Souza Borges, Daniel Gomes Ribeiro, Vitor Salles Bittencourt Muniz

CC03 - UMA BREVE REVISÃO SOBRE MÉTODOS DE LOCALIZAÇÃO DE DANOS BASEADOS NA MATRIZ DE FLEXIBILIDADE ESTRUTURAL E NA CURVATURA DOS MODOS DE VIBRAÇÃO

Rosilene Abreu Portella Corrêa, Cleber de Almeida Corrêa Junior, Andressa Alves Machado da Silva

CC04 - DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DA EQUAÇÃO DE ANTOINE PARA O METANO E O ÁLCOOL ISOPROPÍLICO UTILIZANDO A EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

Vitor Salles Bittencourt Muniz, Igor Meirelles Martins, Daniel Gomes Ribeiro, Ademilton Luiz Rodrigues de Souza, Leonardo de Souza Grigorio

CC05 - UTILIZAÇÃO DE UM JOGO E UM VÍDEO EDUCATIVO PARA ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Ana Paula Santos Pereira, Edson Ribeiro dos Santos de Almeida Júnior, Filipe de Oliveira Barbosa, Valdinei Cezar Cardoso

CC06 - O USO DO JOGO BATALHA NAVAL COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DE PLANO CARTESIANO: UMA EXPERIÊNCIA NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Filipe Ribeiro Carneiro, Rayane Salviano, Saulo dos Santos

CC07 - CONSTRUÇÃO DE CASAS

Melissa Damacena da Cruz, Valdinei Cezar Cardoso

CC08 - ANÁLISE DE UM MODELO MATEMÁTICO DA IMUNOTERAPIA COM CÉLULAS CAR T

Brendon de Jesus Rodrigues, Luciana Carvalho, Regina C. Almeida

CC09 - MODELO BIO-INSPIRADO APLICADO NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Cleber de Almeida Correa Junior, Rosilene Abreu Portella Corrêa, Andressa Alves Machado da Silva

CC10 - PROJETO ÓTIMO DE REDE DE IRRIGAÇÃO SEMI-MECANIZADA DE GRANDE ESCALA

Larissa Thomaz, Gilberto de Miranda Junior

CC11 - A ANÁLISE DE ERROS EM PROGRESSÕES ARITMÉTICAS (PA): DIAGNÓSTICO COM DISCENTES DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Alexandre Dias dos Santos, Regina Maria da Costa Smith Maia

CC12 - LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO OX: UMA APLICAÇÃO EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Luiz Victor Lima Macêdo, Marcelo dos Santos

CC13 - DECOMPOSIÇÃO NATURAL DE HELMHOLTZ-HODGE

José Eduardo Cordeiro, Fabiano Petronetto do Carmo, Enéas Mendes de Jesus

CC14 - ANÁLISE NUMÉRICA EM TANQUE AGITADO POR IMPELIDOR NÃO CONVENCIONAL: CURVA DE POTÊNCIA, NÚMERO DE BOMBEIO E HIDRODINÂMICA

Gustavo Gomes Ferreira, Alessandra Terezinha Silva Souza, Daniel da Cunha Ribeiro

CC15 - IDENTIFICAÇÃO DE DANOS EM UMA VIGA DE EULER-BERNOULLI UTILIZANDO REDES NEURAIS ARTIFICIAIS: UMA AVALIAÇÃO EM RELAÇÃO À POSIÇÃO DO DANO NA ESTRUTURA

Andressa Alves Machado da Silva, Cleber de Almeida Corrêa Junior, Diogo Teixeira dos Santos, Rosilene Abreu Portella Corrêa

CC16 - SINCRONISMO DE SINAIS BASEADO NO APSOC ZYNQ

Alison França Queiroz da Costa, Michael John Brennan, Ailton Akira Shinoda

CC17 - DIAGNÓSTICO ASSISTIDO POR INTELIGÊNCIA COMPUTACIONAL PARA IDENTIFICAÇÃO DE ANEMIAS

Lucas de Souza Kort Camp, Márcio Eccard Kort Kamp, Cleber de Almeida Corrêa Junior, Rosilene Abreu Portella Corrêa

CC18 - ANÁLISE E CONSIDERAÇÃO DO APRENDIZADO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL POR ALUNOS DA ENGENHARIA MECÂNICA

Arthur Farias Silva, Mara Cristina Ramos Quartezani, Otivo José Junior, Samuel Inácio Batista Lima, Werley Gomes Facco

CC19 - MULTISCALE FINITE ELEMENT METHOD COMBINED WITH LOCAL PRECONDITIONING FOR SOLVING EULER EQUATIONS

Sérgio Souza Bento, Leonardo Muniz de Lima, Lucia Catabriga, Isaac P. Santos

CC20 - O MÉTODO SPH

Enéas Mendes de Jesus, Fabiano Petronetto do Carmo, Jose Eduardo Cordeiro

CC21 - USO DO MINECRAFT EDUCACION NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

Elisson Spoladori, Fernanda da Silva Damato, Juliano Schimiguel, Laura Marisa Carnielo Calejon

CC22 - ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA MEDIANTE TRABALHO COLABORATIVO NA NUVEM: EXPERIÊNCIAS COM O GOOGLE APRESENTAÇÕES

Aminadabe de Farias Aguiar, Lúcio Souza Fassarella, Ernane Luis Angeli Luxinger

CC23 - A CONTEMPORANEIDADE NA EDUCAÇÃO: O USO DO CELULAR COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA NA PRÁTICA DOCENTE DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DE ESCOLAS ESTADUAIS DO ESPÍRITO SANTO

Érica Rezende Perini, Joccitiel Dias da Silva

CC24 - ANÁLISE DA DEFASAGEM EM MATEMÁTICA APRESENTADA POR ALUNOS DO CURSO TÉCNICO EM EDIFICAÇÕES (ETIM) NA DISCIPLINA ESMCC

Viviane Fernandes Santos, Laura Marisa Carnielo Calejon

CC25 - O MÉTODO DO GRADIENT SAMPLING COM PASSO LIMITADO APLICADO AO PROBLEMA DE DETERMINAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO OPERACIONAIS DE SISTEMAS DINÂMICOS

Lucas Almeida Portela, Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi

CC26 - MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE DISPERSÃO DE POLUENTES AO REDOR DE UM PRÉDIO CÚBICO

Larissa Santos Coutinho, Fernanda Capucho Cezana, Isaac Pinheiro dos Santos

CC27 - UM MÉTODO VARIACIONAL MULTIESCALA APLICADO ÀS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES INCOMPREENSÍVEIS

Riedson Baptista, Lucia Catabriga, Isaac P. Santos

CC28 - UM ESTUDO NUMÉRICO DO MÉTODO DA BISSECÇÃO PONDERADO E ADAPTATIVO PARA ENCONTRAR RAÍZES DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Paula Silva Gonçalves, Isaac P. Santos

CC29 - OS MÉTODOS NSGA II E DE PROGRAMAÇÃO POR METAS PONDERADAS APLICADOS AO PROBLEMA MULTIOBJETIVO DE DESPACHO ECONÔMICO E AMBIENTAL

Matheus Murback Angelo, Antonio Roberto Balbo, Ricardo Bento Nogueira Mori Pinheiro

CC30 - O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NAS AULAS DE MATEMÁTICA CORRELACIONANDO AOS PENSAMENTOS DE VIYGOTSKY

Brendo Graunke Prates, Patrícia da Cruz Silveiras

CC31 - MÉTRICAS DE REDES COMPLEXAS COMBINADAS PARA UMA DESCOBERTA DE RELACIONAMENTOS EM REDES DE INFORMAÇÃO

Henrique Monteiro Cristovão, Jorge Henrique Cabral Fernandes

PO01 - APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E SUAS OCORRÊNCIAS

Brenda Emile Valdemaz Guimarães, Valdinei Cezar Cardoso

PO02 - O USO DO SCRATCH 2.0 PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES

Arina de Jesus Rozário, Valdinei Cezar Cardoso

PO03 - DIMENSIONAMENTO E SEQUENCIAMENTO DE LOTES DE PRODUÇÃO COM GERENCIAMENTO DA DEMANDA VIA PEDIDOS

Rudivan Paixão Barbosa, Willy Alves de Oliveira Soler, Maristela Oliveira dos Santos

PO04 - UM ESTUDO NUMÉRICO DO MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS PARA A SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES FORMADOS COM A MATRIZ DE HILBERT

Yeverson Carlos Costa dos Santos, Thiago Silva Mantegazini, Fernando Guirra Silva, Natacha Sousa Javarini, Rafaela Freita Santos, Rodolfo Santos Bertolo, Isaac P. Santos

PO05 - O MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO E O ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Jader de Oliveira, Luciano Lessa Lorenzoni, Alexandre Krüger Zocolotti

PO06 - ESTRATÉGIA DE CÁLCULO DOS MODOS ACÚSTICOS NO INTERIOR DE JÚPITER

Luiz Gabriel Souza de Oliveira, Natália Valadares de Oliveira, Alexandre Pasti

PO07 - SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA PROPAGAÇÃO DE CALOR DE UM INCÊNDIO EM RECINTO FECHADO UTILIZANDO UMA FORMULAÇÃO DE FUNÇÃO DE FLUXO E VORTICIDADE

Thiago Alves de Souza, Carlos Andrés Reyna Vera-Tudela

PO08 - DEFASAGEM EM MATEMÁTICA APRESENTADA POR ALUNOS DO CURSO TÉCNICO EM EDIFICAÇÕES (ETIM) NA DISCIPLINA ESMCC: UM CASO ISOLADO?

Viviane Fernandes Santos, Laura Marisa Carnielo Calejon

PO09 - MULTIGRID ALGÉBRICO COMO PRECONDICIONADOR DE MÉTODOS ITERATIVOS NÃO ESTACIONÁRIOS PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES DE GRANDE PORTE

Henrique Gomes de Jesus, Marcelo Torres Pereira Carrion, Maria Claudia Silva Boeres, Lucia Catabriga

Resumo das Palestras

Palestra 1

Como aprender, fazer e ensinar Matemática - desafios e privilégio de ser professor de Matemática

Samuel Rocha de Oliveira (Unicamp)

Resumo: Vamos abordar alguns métodos, estratégias, procedimentos e atitudes que têm evidências de contribuir na aprendizagem de conceitos matemáticos e podem ser utilizados por professores ou em material didático para o ensino de matemática básica. Não há receitas genéricas e os desafios são enormes, mas os resultados são inspiradores.

Palestra 2

Análise de dados urbanos

Fabiano Petronetto do Carmo (UFES)

Resumo: Em decorrência do aumento da aquisição de dados em diferentes ambientes urbanos, o estudo de ferramentas de exploração e análise de dados urbanos tem se tornado fundamental para que possamos entender, planejar e administrar cidades. Nesta palestra vamos apresentar alguns exemplos desses dados e ferramentas visuais de análise desenvolvidas com o objetivo de explorar/analisar tais dados. As ferramentas visuais são obtidas a partir da modelagem matemática dos dados por grafo e de metodologias baseadas em Teoria Espectral de Grafo e Projeção Multidimensional.

Palestra 3

Técnicas de Modelagem Matemática Aplicadas ao Cotidiano

Cristiane Oliveira de Faria (UERJ)

Resumo: O tema central desta palestra é a aplicabilidade da Modelagem Matemática e Computacional em problemas reais, que podem ser encontrados em nosso cotidiano e também em problemas abordados em diversas áreas de engenharia e ciências aplicadas tais como em engenharia de petróleo (reservatórios) e meio ambiente. Propomos aqui uma abordagem numérica, em que soluções de problemas da Engenharia, governados por EDPs, são obtidas aproximadamente em espaços de dimensão finita, empregando-se MEF não-clássicos, em particular, MEF definidos em espaços de funções quebradas, os Métodos Híbridos. Esta metodologia contempla análises matemática e numérica bem como a simulação computacional.

Palestra 4

Problemas de Equilíbrio Setorial com Demandas Sensíveis a Preços: Otimização e Simulação

Gilberto de Miranda Junior (UFES)

Palestra 5

Simulação Numérica da Dispersão de Poluentes em Áreas Urbanas

Elisa Valentim Goulart (UFES)

Resumo: Nesta palestra serão apresentados resultados da dispersão de poluentes em áreas urbanas empregando os modelos de turbulência LES (*Large-Eddy Simulation*) e DNS (*Direct Numeric Simulation*). A presença das edificações em áreas urbanas altera significativamente o padrão do escoamento atmosférico na região de sua vizinhança, alterando o comportamento das plumas de poluentes nesta região, colocando muitas vezes a saúde da população em risco. Com isso, torna-se necessário o envolvimento de pesquisadores com o objetivo de entender melhor os mecanismos que estão presentes na dispersão de poluentes em áreas urbanas para que decisões sejam tomadas visando melhorar a qualidade do ar nessas regiões. As metodologias LES e DNS conseguem descrever com bastante precisão o fenômeno da dispersão de poluentes em áreas urbanas. Dessa forma, análises do padrão do escoamento e da dispersão de poluentes são feitas com o objetivo de entender melhor os fenômenos físicos envolvidos e também desenvolver modelos de dispersão mais simplificados, considerando que o custo computacional das simulações numéricas utilizando a LES e DNS é elevado.

Palestra 6

Modelagem Híbrida Multiescala do Crescimento de Tumores

Regina Célia Cerqueira de Almeida (LNCC)

Resumo: A progressão do câncer resulta da complexa interação de diferentes fenômenos que ocorrem em várias escalas de tempo e espaço. O entendimento desta complexa estrutura multiescala é crucial para o desenvolvimento de novas e eficientes terapias e a modelagem computacional pode ajudar no entendimento da evolução dos múltiplos fatores que ocorrem no microambiente tumoral.

Nesta palestra apresentaremos a abordagem híbrida multiescala desenvolvida para modelar o crescimento de tumores sólidos. Na escala tecidual consideramos a dispersão de nutrientes e fatores de crescimento no microambiente, utilizando equações diferenciais parciais de reação-difusão. No nível celular, desenvolvemos modelos baseados em agentes para descrever as dinâmicas das células saudáveis, endoteliais, e cancerosas, nos seus diversos fenótipos. O movimento das células, seu crescimento e transição fenotípica são controlados tanto pelo balanço de forças de acordo com a segunda Lei de Newton quanto por mecanismo de sinalização intracelular. Estes mecanismos sub-celulares regulam uma grande variedade de respostas ao estímulos extracelulares e são modelados por sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Nosso modelo é construído de forma modular, permitindo a investigação do papel de diferentes mecanismos que interferem na progressão do câncer. Esta estratégia permite a representação tanto do comportamento coletivo de população de células quanto de diversas sinalizações intracelulares. Simulações computacionais demonstram que o modelo é capaz de descrever diversas dinâmicas observadas em tumores sólidos, incluindo a interrupção de crescimento em tumores avasculares e o crescimento estimulado pela angiogênese.

Palestra 7

Das surpresas da Matemática que se aplica no dia a dia...

João Frederico da Costa Azevedo Meyer (Unicamp)

Resumo: Nesta palestra, apresento certas formulações matemáticas que, historicamente, solucionaram problema, começando com situações de pesca e ameaças a populações de pescadas, mistérios que a Matemática resolveu na prática e com Modelagem Matemática, e desafios abertos em convívio de populações, introdução de espécies exóticas, epidemias e políticas de saúde pública e programas de vacinação e previsões.

Palestra FVC (Faculdade Vale do Cricaré)

Modelagem Matemática: como a Matemática "vê" e participa do mundo

João Frederico da Costa Azevedo Meyer (Unicamp)

Resumo: Neste trabalho, apresento uma de muitas definições de Modelagem Matemática com alguns exemplos que ilustrem as características destacadas. Em seguida, abordo as necessidades de avaliar criticamente os modelos obtidos (também usando exemplos) e abordo, finalmente, a importância de se realizarem simulações computacionais antes de interferir na Sociedade e na Natureza.

Minicursos

Minicurso 1

O uso do Geogebra e do esquadro móvel para resolver problemas históricos de medição e alturas
Andressa Cesana (DMA / UFES) e Mariana Pertel (UFES)

Minicurso 2

Padrões e Regularidades
Moysés Gonçalves Siqueira Filho (DECH / UFES)

Minicurso 3

Introdução ao software computacional Ansys – CFX para a solução de problemas envolvendo escoamento de fluidos
Fernanda Capucho Cezana (IFES, Campus São Mateus) e Larissa Coutinho (ECORM Maria Francisca Nunes Coutinho)

Minicurso 4

Introdução a Álgebra Linear Computacional
Lucia Catabriga (DI / UFES)

Minicurso 5

O uso do GEOGEBRA no ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental e Médio
Arildo Castelluber (DMA / UFES)

Minicurso 6

A Teoria Cognitiva da Aprendizagem Multimídia e suas implicações para o ensino de Ciências e Matemática
Valdinei Cezar Cardoso (DMA / UFES)

Minicurso 7

Modelos Compartimentais em Epidemiologia Matemática
Claudia Mazza Dias (UFRRJ)

Minicurso 8

Equações Elípticas de Segunda Ordem
Julio Cesar de Souza Almeida (DMA / UFES)

MLPG2 COM MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS APLICADO A PROTEÇÃO CATÓDICA

MLPG2 WITH MOVING LEAST SQUARES (MLS) APPLIED TO CATHODE PROTECTION

Samuel Berger Velten

*Dr. Prof, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro,
Samuelbv2004@yahoo.com.br*

Edmundo Guimaraes de Araujo Costa Costa

*Pós-doutorado (PNPD/CAPES), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro,
edmundo.costa2010@gmail.com*

Jose Antonio Fontes Santiago

*Dr. Prof, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro,
Santiago@coc.ufrrj.br*

Wilian Jerônimo Santos

*Dr. Prof, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro,
Wilianj@ufrrj.br*

Jose Claudio de Faria Telles

*Dr.Prof., Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro,
Telles@coc.ufrrj.br*

Resumo: Neste trabalho o método sem malha de Colocação usando a função de delta de Dirac como função teste será aplicado a proteção catódica (CP). O problema de potencial eletroquímico é governado pela equação de Laplace com condições de contorno dadas por uma dependência funcional não linear entre densidade de corrente e potencial, chamado curva de polarização. Aquiainda estamos trabalhando com condições de contorno lineares, não concluímos os estudos relacionados a condições de contorno não-lineares. Os diversos resultados de aplicações são discutidos neste trabalho, considerando simulações numéricas em regiões finitas. Para validar a formulação Do Método de Colocação aplicada na simulação de sistemas de proteção catódica, foram comparados os resultados com um procedimento de solução do método dos elementos de contorno (MEC), um dos métodos numéricos mais comumente usados para modelagem de sistemas de CP. Apesar do Método de Colocaçãoapresentar a segunda derivada nas funções de forma, ele não necessita de integração numérica, o que torna o método interessante em aplicações de engenharia.

Palavras chaves: Colocação. Sem Malha. Proteção Catódica.

Abstract: In this work, the non-mesh method of Collocation using the Dirac delta function as a test function will be applied to the cathodic protection (CP). The problem of electrochemical potential is governed by the Laplace equation with boundary conditions given by a nonlinear functional dependence between current density and potential called the polarization curve. Here, we are still working with linear conditions yet we have not completed the studies related to non-linear boundary conditions. The diverse results of applications are discussed in this work, considering numerical simulations in finite regions. In order to validate the fitting formulation applied in the simulation of

cathodic protection systems, the results were compared with a contour element method (MEC) procedure, one of the most commonly used numerical methods for modeling CP systems. Although the Placement Method presents the second derivative in the form functions it does not require numerical integration which makes the method interesting in engineering applications.

Keywords: Collocation. Meshless. Cathodic Protection.

1 Introdução

A corrosão, em geral, é um processo espontâneo, está constantemente transformando os materiais metálicos de modo a afetar suas propriedades e desta forma deixam de satisfazer os fins a que se destinam. No seu todo esse fenômeno assume uma grande importância na vida moderna, uma vez que a cada dia são utilizados mais metais e suas ligas (GENTIL, 2007, pp 1-6).

Uma técnica empregada para combater a corrosão das instalações enterradas, submersas e em contato com eletrólitos é a proteção catódica.

A proteção catódica através de uma fonte externa de energia é aplicada a um grande grupo de estruturas que se encontram em ambientes agressivos, entre eles: navios, plantas químicas, tubulações enterradas, plataformas petrolíferas por exemplo, (GENTIL, 2007, pp 286-287).

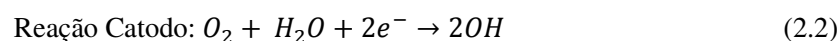
Através da modelagem matemática pode-se prever diversos parâmetros envolvidos tanto por parte do eletrólito quanto por parte do material a ser protegido, e desta forma poder alcançar por exemplo o menor custo para uma dada tomada de decisão.

Os programas computacionais empregados nesse tipo de problema tem o intuito de determinar o potencial e a densidade de corrente na superfície das estruturas a serem protegidas. Importante ressaltar que na simulação numérica sempre pode ser levada em conta detalhes da estrutura como: materiais, variações geométricas, variações das condições do sistema.

Os métodos numéricos mais utilizados nesse tipo de análise são: Método dos Elementos de Contorno (MEC), Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método das Diferenças Finitas. Na última década o método sem malha também vem sendo empregado, mas ainda apresenta pouca expressão quando comparado com os tradicionais. O MSF (Método das Soluções Fundamentais) foi empregado por (SANTOS, SANTIAGO e TELLES, 2013, pp 71-73) e obteve bons resultados. O MSF e o MEC quando comparados com os demais métodos, apresentam vantagem relativa devido a facilidade na discretização dos elementos, ambos os métodos utilizam apenas o contorno do eletrólito. No presente trabalho foi utilizado o MLPG2 (Método Local Petrov-Galerkin) com a função delta de Dirac sendo aplicada como função de ponderação e comparando o mesmo com o MEC.

2 Aspectos eletroquímicos da proteção catódica

O mecanismo básico da proteção catódica é extremamente simples embora sua aplicação exija muita experiência tanto do projetista quanto do instalador do sistema proposto. O princípio da proteção catódica pode ser explicado considerando a corrosão de um metal típico M em um meio ácido. As reações eletroquímicas que ocorrem são a dissolução e a evolução do gás hidrogênio e acontecem simultaneamente (AOKI e AMAIA, 1997, pp 147-148.):



O processo corrosivo de estruturas metálicas se caracteriza pelo aparecimento de áreas catódicas e anódicas, que produzem reações anódicas e catódicas as quais acontecem simultaneamente sobre a superfície metálica, com a consequente ocorrência de um fluxo de corrente elétrica. Este fluxo é gerado por intermédio do contato metálico entre estas duas regiões (GENTIL, 2007, 288-289). As heterogeneidades do solo, em conjunto com as heterogeneidades existentes no material metálico, agravam os problemas de corrosão. Tais variações (resistividade elétrica, grau de aeração, composição química, grau de umidade entre outras) originam também pilhas de corrosão na superfície de materiais enterrados. A relação entre o potencial (E) e a densidade de corrente (i) sobre o metal é dada pela curva de polarização. A relação entre a densidade de corrente i e o potencial E para as reações catódicas e anódicas são obtidas individualmente mas através de uma relação não linear $E = f(i)$.

3 Modelo matemático

Para representar o fenômeno da proteção catódica, o problema em questão foi considerado de forma simplificada por uma equação diferencial no regime estacionário, sujeita a condições de contorno que são caracterizadas por uma função dependente do potencial, e podem ser lineares ou não lineares. Também será considerado o ponto onde o eletrólito entra em contato com o metal, simplificando a discretização, para tal será adotada a formulação matemática do problema de potencial eletroquímico.

3.1 Equação de Governo

Levando em conta que os eletrodos estão considerados em contato com o eletrólito e que será discretizado a partir deste contato, pensando em um domínio qualquer Ω onde existe campo magnético gerado através da movimentação das cargas presentes nesse domínio, que apresenta como contorno Γ que se trata da região de contato entre os eletrodos e o eletrólito, assumindo que o eletrólito é homogêneo e que não temos nem acúmulo nem queda da concentração de eletrólito.

Este princípio será representado pela equação diferencial de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (3.1)$$

onde a densidade de corrente através do contorno Γ é dada por :

$$i = k \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (3.2)$$

k a condutividade elétrica do eletrólito, e $\frac{\partial}{\partial n}$ a derivada normal para fora, note que o potencial elétrico ϕ é definido com referência no metal, o sinal é oposto ao E adotado pela ciência corrosão, onde o potencial é definido com referência no eletrodo tal como o eletrodo saturado de calomelano. $\phi = -E$.

Sujeito as seguintes condições de contorno (BOYCE e DIPRIMA, 1999, pp 424):

$$u(x) = \bar{\phi}(x), \quad x \in \Gamma_1 \quad (3.3)$$

$$q(x) = k \frac{\partial \phi}{\partial n}(x) = \bar{q}(x), \quad x \in \Gamma_2 \quad (3.4)$$

$$q(x) = cq(x) + d, \quad x \in \Gamma_3 \quad (3.5)$$

$$q(x) = F(\phi(x)), \quad x \in \Gamma_4 \quad (3.6)$$

Sendo $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ o contorno de Ω , $q(x)$ a densidade de corrente na direção na normal $\mathbf{n}$, $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$ constantes conhecidas e $F(u)$ uma função não linear de ϕ . As Equações (3.3) e (3.4) representam as condições de Dirichlet e Neumann respectivamente, e as Equações (3.5) e (3.6) são as condições de contorno lineares e não lineares que são dadas pela curva de polarização. Na condição proposta em que a estrutura metálica encontra-se em contato direto com o eletrólito.

4 Método Numérico

4.1 Mínimos quadrados móveis

As funções de interpolação são empregadas na procura por uma solução aproximada, para um problema governado por equações diferenciais parciais, e condições de contorno, a primeira etapa é a escolha da aproximação para as variáveis do problema usando funções de forma. As funções de forma, no caso dos métodos sem malha, devem ser capazes de representar com precisão a variável de interesse em um ponto qualquer do domínio, este definido em um suporte local conforme Figura (1) que contém pontos distribuídos de forma arbitrária. Portanto a construção eficiente de funções de forma para métodos sem malha desempenha uma das etapas principais para a boa qualidade dos resultados. Comparando-se com o MEF, onde as funções de forma são pré-definidas (dependem somente dos tipos de elementos empregados), percebe-se que o método sem malha custa mais caro do ponto de vista computacional, posto que necessita de uma etapa a mais que é a construção das funções de forma. Porém o pré-processamento é mais vantajoso por parte dos métodos sem malha tendo em vista que nenhuma malha precisa ser gerada, necessitando-se somente de pontos distribuídos no domínio e contorno do problema de maneira arbitrária. Abaixo será apresentado o método dos mínimos quadrados móveis uma técnica de interpolação utilizada nos métodos sem malha (BELYTSCHKO et al., 1996, pp 10-16).

Considerando $\Omega_x \subset \Omega$ um subdomínio segundo (ATLURI e SHEN, 2002, pp 14.) que representa localmente a vizinhança em relação ao ponto x o domínio da definição da aproximação por mínimos quadrados móveis (MQM) para a função de interpolação de um ponto $x \in \Omega_x$ e que esteja localizado em um domínio Ω . Para aproximar uma função $u(x)$ qualquer que deve ser aproximada no subdomínio Ω_x e uma nuvem de pontos $\{x(i)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, distribuídos na vizinhança do ponto x . Os pontos vizinhos a x são utilizados para gerar uma aproximação por MQM $u^h(x)$ da função $u(x)$ da seguinte forma conforme a Equação (4.1)

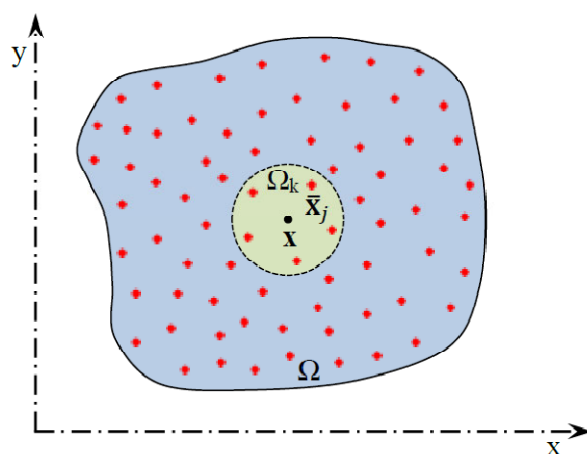


Figura 1- Pontos dentro de um suporte

Fonte: Adaptado, (LIU e GU, 2005, pp 240).

$$u^h(x) = \sum_1^m p_j(x) a_j(x) \equiv p^T(x) a(x) \quad (4.1)$$

Onde $a_j(x)$ é a j -ésima incógnita, $p_1(x) = 1$ e $p_j(x)$ é o j -ésimo termo da base, são monômios do espaço coordenado $x^T(x) = [x, y]$ de modo a base ser completa. Sendo $p^T = \{p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)\}$ onde m é o número de termos da base.

Para subdomínios bidimensionais Ω_x , as bases polinomiais utilizadas são:

$$P^T(x) = [1, x, y], \quad m = 3 \text{ para base linear} \quad (4.2)$$

$$P^T(x) = [1, x, y, x^2, xy, y^2], \quad m = 6 \text{ para base quadrática} \quad (4.3)$$

4.2 MLPG 2

O Método de Colocação, no qual trabalha-se diretamente com a forma forte do sistema de equações diferenciais utiliza um esquema de interpolação adequado à aproximação por pontos aleatórios no domínio do problema, por exemplo, os MQM ou por funções de base radial (FBR) (LIU e GU, 2005, pp 310-311). O método de colocação é um método bem difundido na literatura e de simples implementação, porém derivadas de ordem superior da variável de interesse normalmente são inevitáveis, surgindo problemas de instabilidade.

Os métodos aplicados a formulação forte segundo LIU e GU (2005, pp 310) apresentam muitas vantagens, as principais delas seguem abaixo:

- O procedimento para discretizar a equação de governo é direto. A equação discretizada é obtida diretamente através da forma forte da Equação Diferencial Parcial que governa o problema.
- Os métodos de formulação forte são, em geral, computacionalmente eficientes. As Equações diferenciais parciais são discretizadas diretamente sem usar formulação fraca, assim não necessitam de integração numérica.
- Devido a essas vantagens, o método sem malha de formulação forte é usado em mecânica computacional com bastante sucesso (LIU e GU, 2005, pp 380-381), especialmente na mecânica dos fluidos. Neste estudo em especial o método está sendo proposto para avaliar a proteção catódica de superfícies metálicas submetidas a ambientes nocivos a sua estrutura.

Considerando a equação de Poisson em um domínio global Ω_s e envolta por um contorno Γ pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} [\nabla^2 u - f] \Delta d\Omega = 0 \quad (4.4)$$

Após a aplicação da função Delta de Dirac(Δ) a formula fraca se reduz à formula forte. Substituindo as funções de interpolação na Equação (4.4) para os nós internos, leva ao sistema de equações lineares (4.5).

$$K \cdot \hat{u} = f \quad (4.5)$$

Onde u é o vetor de incógnitas e K é a matriz dos coeficientes que dependem do tipo de ponto considerado. Utilizando a aproximação através dos mínimos quadrados móveis para a variável de interesse, é necessário um pós processamento para obter a variável real do problema.

Resolvendo o sistema (4.5), obtém-se uma solução para o problema (3.1). O procedimento de solução acima é conhecido como MLPG 2e não usa nenhum tipo de conectividade entre pontos. Pode-se escolher, por exemplo, funções de interpolação do tipo FBR ou do tipo MQM para a aproximação das variáveis de interesse. Nenhum tipo de integração numérica é necessário neste método, que também é conhecido como Método de Colocação (ATLURI e SHEN, 2002, pp 23) na literatura.

Um dos aspectos mais problemáticos no uso dos métodos de colocação é sua forte instabilidade numérica.

5 Aplicação numérica

Exemplo numérico.

O problema proposto é um retângulo com lados $2a \times a$ ($a = 1\text{m}$) são utilizados 30 nós no contorno e 36 nós em pontos internos a função de interpolação adotada foi a spline de quarta ordem. O problema foi feito uma comparação entre a solução do MEC e do Método de Colocação para diferentes situações onde foi analisada a densidade de corrente e o potencial em condutividades diferentes do meio.

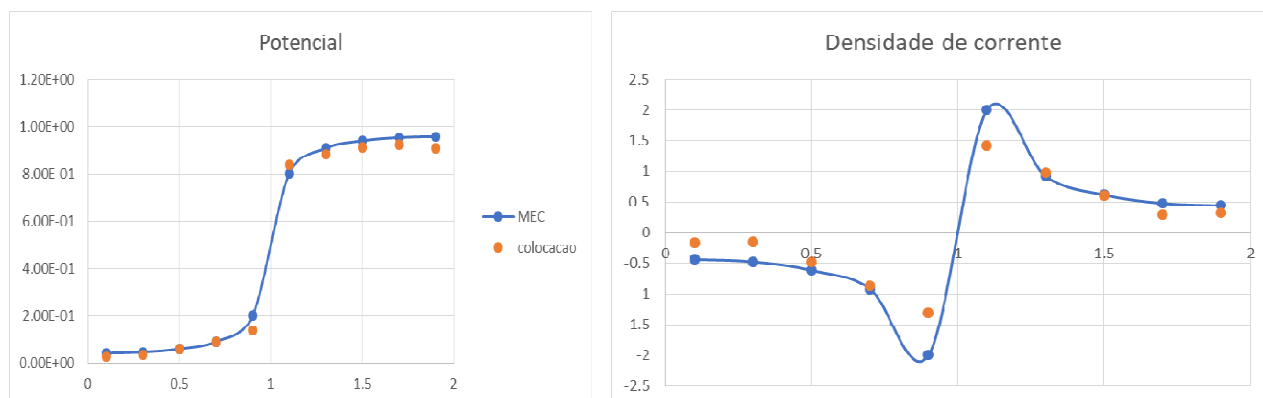


Figura 6 – Resultado com $k = 1$.

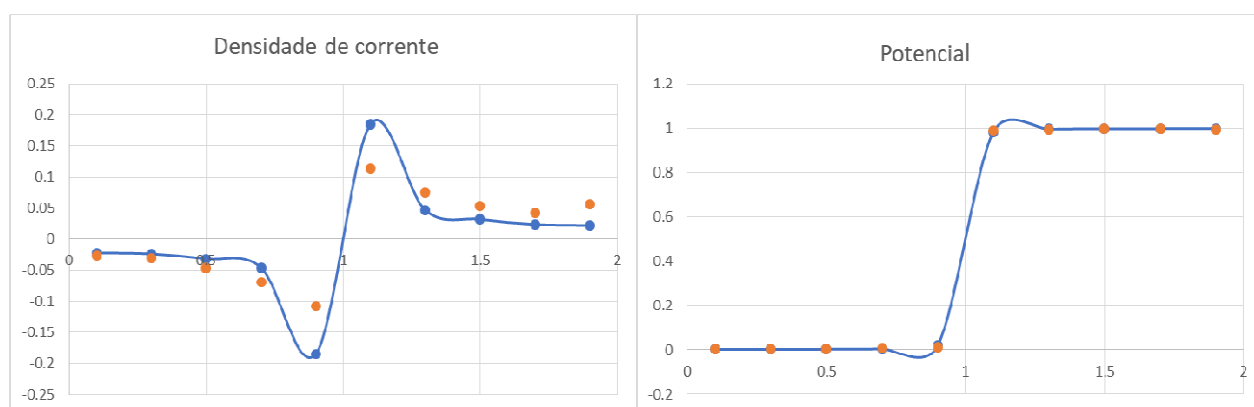


Figura 7 – Resultado com $k = 0,05$.

6 Conclusão

O trabalho demonstra que o método de Colocação apresenta potencial para ser aplicado também a proteção catódica. Em problemas simples o Método apresenta resultados muito precisos, com rapidez e necessidade de poucos nós para a convergência. Ainda não foram feitos estudos para problemas com condições de contorno não lineares devido a algumas particularidades da formulação. É importante ressaltar que quando comparado com o MEC os resultados de densidade de corrente e potencial obtidos pelo Método de Colocação estiveram muito próximos aos obtidos com o MEC.

7 Referências

G.R. LIU e Y.T. GU., “An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming”.Springer: Netherlands, 2005.

BREBBIA, C.A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L. C., “Boundary Elements Techniques: Theory and Applications in Engineering”. Springer-Verlag: New York, 1984.

GENTIL, V., Corrosão. LTC, 5ª edição: Rio de Janeiro, Brasil, 2007.

WILLIAM E. BOYCE e RICHARD C. DIPRIMA., “EquaçõesDiferenciaisElementares e Problemas de Valores de Contorno” LTC: Rio de Janeiro, 1999.

T. BELYTSCHKO, Y. KRONGAUZ, D. ORGAN, M. FLEMING and P. KRYSL: Meshless Methods: “An Overview and Recent Developments, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering”, v. 139, pp. 3-47, 1996.

SHIGERU AOKI e KENJI AMAYA: “Optimization of cathodic protection system by BEM”. Engineering Analysis with Boundary Elements v. 19, pp. 147-156, 1997.

SANTOS, W. J., SANTIAGO, J. A. F., TELLES, J. C. F., “Optimalpositioningofanodesand virtual sources in the design ofcathodicprotection systems usingthemethodof fundamental solutions", EngineeringAnalysiswithBoundaryElements, v. 46, n. 1, pp. 67-74, 2014.

S. N. ATLURI, S. SHEN., “The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite and Boundary Element Methods”, CMES, v.3, nº 1,pp. 11-51, 2002.

Estratificação do Solo para Projetos de Aterramento Elétrico Utilizando Evolução Diferencial

Paulo Victor de Souza Borges

*Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ – Nova Friburgo, RJ
paulo.souza@cefet-rj.br*

Daniel Gomes Ribeiro

*Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ – Nova Friburgo, RJ
daniel.ribeiro@cefet-rj.br*

Vitor Salles Bittencourt Muniz

*Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ – Nova Friburgo, RJ
vitor.muniz@aluno.cefet-rj.br*

Resumo: Um sistema de aterramento elétrico bem dimensionado é essencial para uma instalação elétrica segura e eficaz. Para o desenvolvimento do projeto de aterramento, é necessário o levantamento das características do solo e construção do seu modelo elétrico. Este trabalho se propõe à obtenção de parâmetros associados ao processo da estratificação do solo para projetos de sistemas de aterramento elétrico utilizando o algoritmo da Evolução Diferencial. O algoritmo foi utilizado tanto para exemplos de solo presentes na literatura quanto para um caso de solo real. Os resultados mostram que o algoritmo utilizado apresentou boa convergência e menores erros percentuais quando comparados com os erros apresentados pelos parâmetros presentes na literatura.

Palavras-chave: Aterramento Elétrico. Estratificação do Solo. Evolução Diferencial.

Introdução

Toda instalação elétrica, para correto funcionamento e segurança contra riscos de acidentes, deve possuir um sistema de aterramento dimensionado adequadamente, considerando as particularidades de cada projeto (MAMEDE FILHO, 2007). Para a elaboração do projeto de um sistema de aterramento, é necessário o conhecimento das características do solo, em especial sua resistividade, que é um dado fundamental para a modelagem. O levantamento dos valores de resistividade é realizado através de medições em campo, com o objetivo de se obter uma série de medidas para serem utilizadas na construção de um modelo de solo equivalente às suas características elétricas (GILBERT, 2012).

Medição da Resistividade do Solo pelo Método de Wenner

Dentre os diversos métodos existentes para medição da resistividade do solo, o mais amplamente conhecido e utilizado é o método de Wenner, no qual quatro hastes de teste são colocadas em linha, separadas por certa distância e enterradas no solo a uma profundidade de cerca de 20 cm. As hastes são conectadas a um equipamento denominado terrômetro: as duas hastes das extremidades são conectadas aos terminais de corrente do terrômetro e as duas hastes centrais são conectadas aos terminais de potencial (MAMEDE FILHO, 2007). A Figura 1 mostra a configuração das hastes para o Método de Wenner:

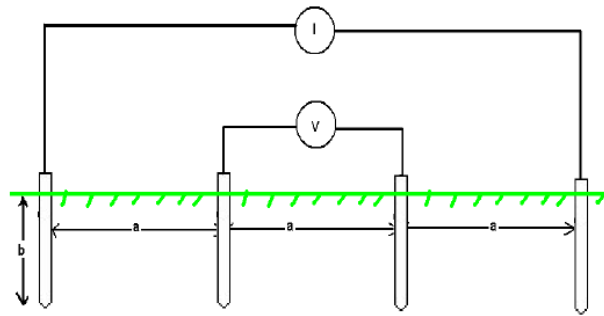


Figura 1: Método de Wenner para medição de resistividade do solo (NASSEREDDINE, 2013).

A distância entre as hastes corresponde à profundidade do solo em que se mede a resistividade: se a distância entre as hastes é aumentada, as medidas de resistividades serão de camadas mais profundas do solo. A distância entre as hastes deve variar e diversas leituras devem ser feitas para diferentes espaçamentos, cobrindo toda área onde será instalado o aterramento. A Equação (1) determina a resistividade baseada nas medições pelo Método de Wenner (KINDERMAN; CAMPAGNOLO, 1995):

$$\rho = \frac{4\pi a R}{1 + \frac{2a}{\sqrt{a^2 + (2p)^2}} - \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + (2p)^2}}}, \quad (1)$$

em que a é o afastamento entre as hastes, p é a profundidade da haste no solo, ρ a resistividade em ohm metro e R a leitura da resistência no terrômetro para uma profundidade a , em ohm. Para grandes afastamentos entre as hastes ($a > 20p$), a equação acima se reduz à Equação (2):

$$\rho = 2\pi a R \quad (2)$$

Estratificação do Solo em Duas Camadas por Técnicas de Otimização

O solo geralmente é constituído por várias camadas horizontais em virtude de sua formação geológica diferente ao longo dos anos, sendo, por esta razão, modelado em camadas estratificadas. Dentre os diversos métodos existentes para estratificação do solo, a modelagem matemática do solo em duas camadas horizontais consiste em determinar a resistividade da primeira e segunda camada do solo, bem como a profundidade da primeira camada. Conforme Gilbert (2012), a modelagem em duas camadas apresenta uma boa aproximação da estrutura do solo para projetos de sistemas de aterramento.

A modelagem do solo em duas camadas é desenvolvida a partir das equações do eletromagnetismo, auxiliadas pelas medições efetuadas com o Método de Wenner. A Equação (3) abaixo apresenta o cálculo da resistividade para um solo de duas camadas (KINDERMAN; CAMPAGNOLO, 1995):

$$\rho(a) = \rho_1 \left(1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{K^n}{\sqrt{1 + (2n \frac{h}{a})^2}} - \frac{K^n}{\sqrt{4 + (2n \frac{h}{a})^2}} \right) \right), \quad (3)$$

onde a é o afastamento entre as hastes, h é a profundidade da primeira camada, ρ_1 a resistividade da primeira camada e K é o coeficiente de reflexão, definido pela Equação (4):

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (4)$$

A partir do levantamento de dados obtidos em campo com a configuração de Wenner, tem-se a relação entre a e $\rho(a)$ medidos. Os valores de $\rho(a)$ medidos e os calculados através da Equação (3), devem ser, portanto, idênticos. Através de técnicas de otimização, pode-se obter o melhor solo estratificado em duas camadas, ou seja, obter os valores de ρ_1 , h e K , minimizando os desvios entre os valores medidos e calculados. A solução será, portanto, obtida a partir da minimização da função apresentada na Equação (5), que é a expressão da minimização dos desvios ao quadrado (KINDERMAN; CAMPAGNOLO, 1995).

$$\min \sum_{i=1}^q \left(\rho(a_i) - \rho_1 \left(1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{K^n}{\sqrt{1 + (2n \frac{h}{a_i})^2}} - \frac{K^n}{\sqrt{4 + (2n \frac{h}{a_i})^2}} \right) \right) \right)^2 \quad (5)$$

Na Equação (5), i representa as diferentes medidas para cada espaçamento entre hastes no Método de Wenner.

Algoritmos Evolucionários e Evolução Diferencial

Algoritmos evolucionários são métodos de otimização e busca estocásticos, inspirados em processos de evolução biológica que, quando comparados com métodos determinísticos (como método do gradiente, multiplicadores de Lagrange, dentre outros), podem ser considerados como detentores de maior capacidade de busca global sobre o domínio do problema, robustez e generalidade, pelo fato de poderem ser aplicados a problemas de geometrias complexas e cujas análises e critérios de convergências poderiam se apresentar desafiadoras aos métodos tradicionais baseados em cálculo (HAN, 2002). Algoritmos genéticos, Programação Evolucionária, Harmonic Search, Luus-Jaakola são alguns exemplos de algoritmos evolucionários amplamente discutidos e testados ao longo de quase meio século de estudos. De maneira geral, podemos classifica-los como procedimentos aplicados sobre um conjunto (população) de soluções em potencial (indivíduos), onde alguma regra de combinação, geração de novos indivíduos e seleção do tipo *greedy* são utilizados, a fim de se produzir uma subsequência de indivíduos que convirja para a solução do problema.

A Evolução Diferencial (ED), que foi originalmente proposta por Rainer Storn e Kenneth Price (1997), é um método de busca paralelo direto que utiliza uma população de NP indivíduos (vetores) n -dimensionais $x_{i,G}$, $i=1,2,...,NP$ para cada geração G , cujos indivíduos são vetores de coordenadas randomicamente de maneira que sejam distribuídos sobre o domínio do problema. Para cada indivíduo i , $i=1,2,...,NP$ da população, a ED gera um novo indivíduo (vetor) perturbado $v_{i,G+1}$ através da Equação (6), chamada de mutação, em que r_1 , r_2 e r_3 são índices aleatórios entre 1 e NP , indicando indivíduos geradores na população, tais que $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$. A Equação (6) define matematicamente o esquema de mutação denominado *DE/rand/1*.

$$v_{i,G+1} = x_{r_1,G} + F(x_{r_2,G} - x_{r_3,G}) \quad (6)$$

Após a geração de um novo indivíduo através da soma ponderada das características (componentes vetoriais) dos três indivíduos geradores, é aplicado um processo de crossover, com o objetivo de aumentar a diversidade genética (componentes vetoriais) do vetor perturbado através da mutação (STORN; PRICE, 1997). O novo indivíduo candidato $u_{i,G+1}$ é definido segundo as Equações

(7) e (8). Na Equação (8), a fim de se garantir que ao menos umas das componentes do novo indivíduo candidato seja uma componente do vetor perturbado $v_{i,G+1}$, para cada indivíduo k da população, a cada geração, é sorteado um índice $randômico_i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Além disso, associado a cada componente j de cada indivíduo i da população, um número $randômico_j \in [0, 1]$ é sorteado. Ao se compor o novo indivíduo candidato a solução, componente a componente, temos o seguinte comportamento: caso a componente atual seja a componente de índice igual a $randômico_i$ ou o valor de $randômico_j$ seja menor ou igual à taxa CR de crossover, a componente utilizada a composição do candidato será a componente do vetor perturbado. Caso contrário, utiliza-se a componente do vetor atual da população. A Figura 2 exemplifica o processo.

$$u_{i,G+1} = (u_{1i,G+1}, u_{2i,G+1}, \dots, u_{ni,G+1}) \quad (7)$$

$$u_{i,G+1} = \begin{cases} v_{ji,G+1}, & \text{se } randômico_j \leq CR \text{ ou } j = randômico_i \\ x_{ji,G} & \text{se } randômico_j > CR \text{ ou } j \neq randômico_i \end{cases} \quad (8)$$

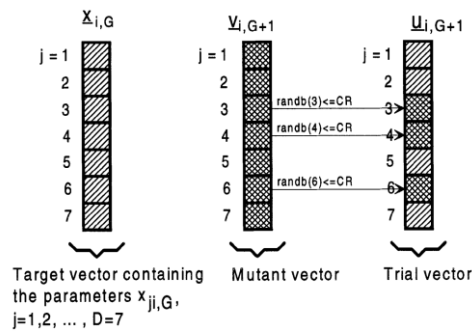


Figura 2: processo de crossover, para $n=7$ (STORN; PRICE, 1997).

Após o processo de *crossover*, é aplicado um processo de seleção do tipo *greedy*, onde a aptidão de cada indivíduo é avaliada: caso a função objetivo calculada no indivíduo u_i assuma um valor inferior à mesma função calculada no indivíduo x_i da população, o indivíduo x_i é substituído na população pelo indivíduo u_i . Caso contrário, x_i permanece na população.

De acordo com os idealizadores do algoritmo (STORN; PRICE, 1997), o algoritmo DE apresenta velocidade de operação, aliado a uma boa taxa de exploração do domínio do problema.

Alguns autores propuseram modificações na Equação (6), que define o processo de mutação. Os autores Neri e Tirronen (2009) apresentam em seu trabalho um *survey* contendo propostas alternativas à estrutura padrão *DE/rand/l*. Nesse trabalho, foi utilizado a regra proposta por Das and Konar (2005), que propõe a utilização de um parâmetro F definido pela Equação (9), onde $rand_{(0,1)}$ é um número aleatório uniformemente distribuído entre 0 e 1.

$$F = 0.5 + (1 + rand_{(0,1)}) \quad (9)$$

Estudo de Caso e Resultados

Como estudo de caso, foram avaliados três casos de solo disponíveis na literatura, os exemplos 3.5.1, 3.6.1 e 3.7.1 propostos por Kindermann e Campagnolo (1995), e, posteriormente, foi realizada a análise de um solo real em que os dados foram cedidos pela empresa Promon Engenharia. Na Tabela

1, são apresentados os dados da distância (a) entre as hastes e a resistividade (ρ), medida em ohm metro, dos solos dos casos estudados.

Tabela 1 – Dados de espaçamento e resistividade dos casos analisados.

Exemplo 3.6.1		Exemplo 3.5.1		Exemplo 3.7.1		Solo real	
a [m]	ρ [Ω .m]	a [m]	ρ [Ω .m]	a [m]	ρ [Ω .m]	a [m]	ρ [Ω .m]
2,5	320	1	684	1	996	1	42,98
5	245	2	611	2	974	2	36,99
7,5	182	4	415	4	858	4	15,83
10	162	6	294	6	696	8	3,69
12,5	168	8	237	8	549	-	-
15	152	16	189	12	361	-	-
-	-	32	182	16	276	-	-
-	-	-	-	22	230	-	-
-	-	-	-	32	210	-	-

Na Tabela 2 são mostrados os resultados do exemplo 3.6.1 encontrados por Kindermann e Campagnolo (1995), através dos métodos do Gradiente, Linearizado e Hooke-Jeeves. Apresenta-se na mesma tabela, os resultados encontrados pelo algoritmo da Evolução Diferencial. Nas duas últimas linhas, destacam-se, respectivamente, o erro relativo médio percentual e o valor mínimo quando as medições e espaçamentos da Tabela 1 são aplicados na Equação (5). Seguidamente, na Tabela 3, são apresentados os resultados dos exemplos 3.5.1 e 3.7.1 obtidos pelo algoritmo da Evolução Diferencial e pela literatura.

Tabela 2 – Solução encontrada para o exemplo 3.6.1.

Estratificação do Solo	Gradiente	Linearizado	Hooke-Jeeves	Evolução Diferencial
Resistividade do solo da 1ª camada [Ω .m]	383,49	364,67	364,335	364,6
Resistividade do solo da 2ª camada [Ω .m]	147,65	143,61	144,01	143,63
Profundidade da 1ª camada [m]	2,56	2,82	2,827	2,827
Fator de Reflexão K	-0,44	-0,43	-0,4334	-0,4348
Erro relativo médio percentual (%)	3,711	3,301	3,090	3,042
Mínimo da função de minimização	337,375	268,577	258,304	257,780

Tabela 3 – Solução encontrada para os exemplos 3.5.1 e 3.7.1 da literatura.

Estratificação do Solo	Exemplo 3.5.1		Exemplo 3.7.1	
	Literatura	Evolução Diferencial	Literatura	Evolução Diferencial
Resistividade do solo da 1ª camada [Ω .m]	700	700,08	1000	999,72
Resistividade do solo da 2ª camada [Ω .m]	166,36	180,32	200	199,99
Profundidade da 1ª camada [m]	2,574	2,497	5	4,99
Fator de Reflexão K	-0,6159	-0,5903	-0,66667	-0,66659
Erro relativo médio percentual (%)	3,14	0,059	0,0768	0,0598
Mínimo da função de minimização	536,611	0,288	0,9968	0,5498

Conforme mostrado nas Tabelas 2 e 3, os resultados obtidos pelo algoritmo da Evolução Diferencial apresentaram os menores erros relativos médios percentuais, logo, as soluções encontradas estabeleceram uma maior concordância com os dados experimentais se comparados com os parâmetros da literatura. Na Figura 3, são mostradas as curvas das resistividades calculadas pelo método de Wenner, com os parâmetros da literatura e do método da Evolução Diferencial para o exemplo 3.5.1 da Tabela 3. É possível notar que a solução encontrada pelo algoritmo apresentou uma melhor interpolação ao conjunto de dados do exemplo.

Na análise do solo real, a solução encontrada é mostrada na Tabela 4 e, na Figura 4, é ilustrada a curva da resistividade calculada pelo método de Wenner com a solução da Tabela 4.

Tabela 4 – Solução encontrada para o solo real.

Estratificação do Solo	Evolução Diferencial
Resistividade do solo da 1ª camada [$\Omega.m$]	45,584
Resistividade do solo da 2ª camada [$\Omega.m$]	1,441
Profundidade da 1ª camada [m]	2,365
Fator de Reflexão K	-0,939
Erro relativo médio percentual (%)	5,140
Mínimo da função de minimização	3,077

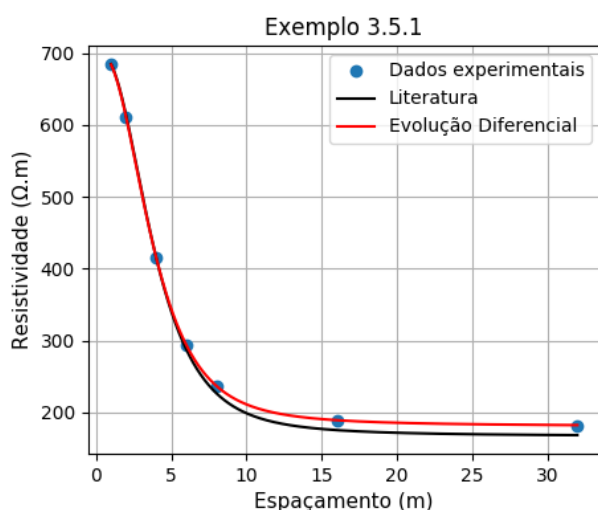


Figura 3: Resistividades calculadas e experimentais para o exemplo 3.5.1.

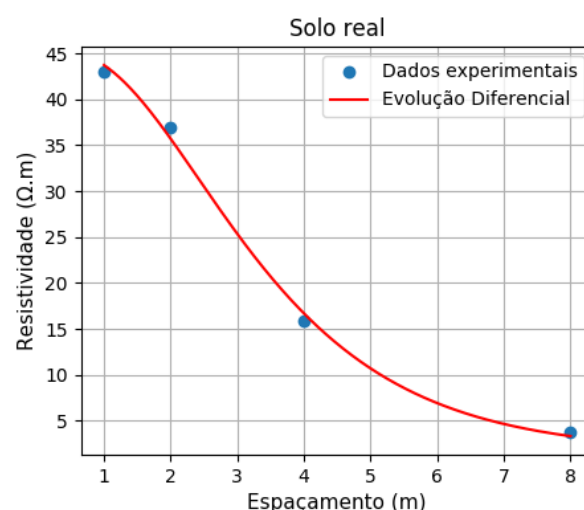


Figura 4: Resistividades calculadas e experimentais para o solo real.

Diferente dos casos estudados anteriormente, em que os parâmetros dos problemas já eram determinados na literatura, na análise do solo real, pode-se utilizar como comprovação dos resultados: a interpolação da Figura 4, os parâmetros encontrados pelo algoritmo que foram utilizados para gerar a curva que interpola os dados experimentais, o erro relativo médio percentual da Tabela 4 e os exemplos analisados em que as soluções obtidas pelo algoritmo se aproximaram das soluções da literatura.

Conclusões

De acordo com as análises gráficas e numéricas realizadas nesse trabalho, foi observado que os parâmetros de solo encontrados pelo método da Evolução Diferencial, para os exemplos da literatura, apresentaram uma maior concordância com os dados dos exemplos analisados se comparados com os

parâmetros da literatura. Posteriormente, como o algoritmo demonstrou uma boa convergência dos parâmetros do método de Wenner para os exemplos estudados, foi feita a análise do solo real e a solução obtida foi capaz de interpolar os dados experimentais.

Para trabalhos futuros especula-se fazer o estudo de novos solos, com perfis de curvas diferentes, pelo método de Yokogawa ou de Pirson com o emprego do método de otimização da Evolução Diferencial.

Referências

- BUNDAY, B.D.; GARSIDE G.R. **Optimisation Methods in Pascal**, Edward Arnold Publishers, 1987.
- DAS S; KONAR, A. An improved differential evolution scheme for noisy optimization problems. In: Pattern recognition and machine intelligence. In: **International Conference on Pattern Recognition and Machine Intelligence**, Springer, Berlin, 2005. P. 417–421.
- F. NERI; V. TIRRONEN. Recent advances in differential evolution: a survey and experimental analysis. **Artificial Intelligence Review**, 33, n. 1-2, pp. 61-106, 2010.
- GILBERT, G. Soil Modelling Techniques. **International Journal of Materials Science and Applications**, v. 1, n. 1, pp. 8-13, 2012.
- HAN, K. H.; KIM, J. H. Quantum-Inspired Evolutionary Algorithm for a Class of Combinatorial Optimization. **IEEE transactions on evolutionary computation**, v. 6, n. 6, pp. 580-593, 2002.
- KINDERMAN, G; CAMPAGNOLO, J. **Aterramento Elétrico**, 3ª Edição. Porto Alegre: Sagra DC Luzzatto. 1995.
- MAMEDE FILHO, J. **Instalações Elétricas Industriais**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.
- NASSEREDDINE, M. et al. G.. Soil Resistivity Data Computations; Single and Two-Layer Soil Resistivity Structure and Its Implication on Earthing Design. **World Academy of Science, Engineering and Technology**, 7, p. 878-883, 2013.
- STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. **Journal of global optimization**, 11, n. 4, pp. 341-359, 1997.

Uma breve revisão sobre métodos de localização de danos baseados na matriz de flexibilidade estrutural e na curvatura dos modos de vibração

Rosilene Abreu Portella Corrêa
Universidade Federal Fluminense
rosileneportella@id.uff.br

Cleber de Almeida Corrêa Junior
Universidade Federal Fluminense
cleberacj@id.uff.br

Andressa Alves Machado da Silva
Universidade Federal Fluminense
andressa_alves@id.uff.br

Resumo: Neste trabalho apresenta-se uma revisão bibliográfica de métodos de localização de danos baseados nas modificações sofridas pela matriz de flexibilidade e pela curvatura dos modos de vibração devido à presença de um dano estrutural. A utilização de tais métodos é uma tentativa de obter informações sobre a região afetada pelo dano, visando-se diminuir o número de variáveis a serem atualizadas pelos métodos de otimização estocástica, comumente usados para minimização do funcional envolvido. O objetivo deste trabalho é verificar a eficiência de tais métodos quando um número reduzido de Graus de Liberdade da estrutura são medidos e quando há presença de sinais corrompidos por ruído.

Palavras-chave: Localização de danos. Matriz de Flexibilidade. Curvatura dos modos de vibração.

Introdução

Os métodos de identificação de danos disponíveis na literatura, geralmente buscam minimizar um funcional baseado na diferença entre características da estrutura intacta e experimental. Nesse processo, é comum a utilização de métodos de otimização estocásticos para lidar com situações onde apenas um número reduzido de sensores estejam disponíveis e a presença de dados ruidosos seja considerada. A busca por um método de localização visa reduzir o número de parâmetros a serem atualizados pelos métodos de otimização. Dessa forma, a identificação de danos passa a ser realizada em duas etapas onde, na primeira, apenas a região afetada pelo dano é indicada e, na segunda, o método de otimização é utilizado para atualizar apenas os parâmetros da região indicada na primeira. Na literatura, ver Jauregui e Farrar (1996), Pandey e Biswas (1994), Tomaszewska (2010), entre outros, é possível encontrar diversos métodos de localização de danos baseados nas modificações sofridas pela matriz de flexibilidade e pela curvatura dos modos de vibração devido à presença de um dano estrutural.

Métodos de Localização de danos estruturais

0.1 Variação na matriz de flexibilidade

Nesse método, apresentado por Pandey e Biswas (1994), o dano é localizado por comparação entre a matriz de flexibilidade com dano (G_{exp}) e sem dano (G),

$$\Delta G = G_{exp} - G, \quad (1)$$

assim, a matriz ΔG representa as alterações na matriz de flexibilidade. Cada coluna de ΔG fornece a variação sentida pelo GDL medido, referente a tal coluna. Sendo m o número de Graus de Liberdade

(GDL) medidos, para cada GDL j , $j = 1, \dots, m$, pode-se definir o vetor $\Delta_F j$ como o valor máximo entre os elementos $\delta_{i,j}$ de cada coluna da matriz ΔG , assim

$$\Delta_F j = \max |\delta_{i,j}|, i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Analisando-se o vetor Δ_F , percebe-se que o dano encontra-se localizado nos pontos de medição onde houver uma mudança brusca ou picos de variação de flexibilidade, dependendo das condições de contorno abordadas.

0.2 Método da curvatura dos modos

Pandey et al. (1991), apresentaram um método que relaciona as formas modais com o dano estrutural. Esse método se baseia no fato de que, as estruturas compostas de vigas ou placas têm como esforço principal o momento fletor. Como o momento fletor é proporcional à curvatura, o dano altera o momento fletor da estrutura e, conseqüentemente, a curvatura dos modos de vibração. A curvatura dos modos pode ser calculada a partir de diferenças centradas como,

$$C_m(i) = \frac{\phi(i+1) - 2\phi(i) + \phi(i-1)}{0.5(L_{i+1}^2 + L_i^2)}. \quad (3)$$

onde $C_m(i)$ é o i -ésimo elemento do vetor de curvatura dos modos, $\phi(i)$ é a ordenada do modo de vibração no ponto de medição i e L_{i+1} e L_i são as distâncias entre os pontos medidos i e $i+1$, ou i e $i-1$, respectivamente.

A localização do dano é calculada através do valor da maior diferença entre a curvatura dos modos analíticos, C_m^a , e experimentais, C_m , dada por

$$W_{Cm}(i) = C_m^a(i) - C_m(i). \quad (4)$$

onde W_{Cm} é o vetor contendo a diferença entre a curvatura dos modos de vibração da estrutura intacta e danificada.

0.3 Índices de danos baseados na flexibilidade e na curvatura dos modos

Os índices normalizados Z_F e Z_C , são apresentados por Tomaszewska (2010) na tentativa de evidenciar as regiões afetadas por um dano estrutural. Os referidos índices são descritos nas Equações 5 e 6, respectivamente:

$$Z_F(i) = \frac{W_F(i) - \bar{W}_F(i)}{\sigma_F}; \quad (5)$$

$$Z_C(i) = \frac{W_{Cm}(i) - \bar{W}_{Cm}(i)}{\sigma_{Cm}}, \quad (6)$$

onde $\bar{W}_F$ e $\bar{W}_{Cm}$, representam os valores médios dos índices W_F e W_{Cm} , respectivamente, e σ_F e σ_{Cm} representam o desvio padrão de cada índice em relação ao seu valor médio.

O índice W_F é calculado como a diferença entre a derivada à direita e à esquerda de cada ponto discretizado da função discreta $\mathcal{D}(i)$, assim

$$W_F(i) = \frac{[\mathcal{D}(i) - \mathcal{D}(i-1)]L_{i+1} - [\mathcal{D}(i+1) - \mathcal{D}(i)]L_i}{L_i L_{i+1}}, \quad (7)$$

e ainda,

$$\mathcal{D} = \text{diag}(G_{exp} - G), \quad (8)$$

onde $\text{diag}()$ significa diagonal da matriz.

O índice W_{Cm} , Eq. (4), fornece a diferença entre a curvatura dos modos de vibração da estrutura intacta e danificada.

Segundo Tomaszewska (2010), considera-se como valores limites $Z_F(i) = 2$ e $Z_C(i) = 2$. Valores acima destes representam uma alta probabilidade de um defeito estar localizado na região i .

0.4 Variação na curvatura da flexibilidade

Este método parte do pressuposto de que uma estrutura sadia possui o gráfico da curvatura de flexibilidade com uma forma suave. Assim, qualquer pico ou descontinuidade nesse gráfico pode representar um dano. Dessa forma, Lu et al. (2002) apresentaram o cálculo da curvatura da flexibilidade utilizando-se diferenças centradas, como segue

$$F_C(i) = \frac{G_{exp}(i-1, i-1) - 2G_{exp}(i, i) + G_{exp}(i+1, i+1)}{\Delta h^2}, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (9)$$

onde, $F_C(i)$ refere-se ao i -ésimo elemento do vetor de curvatura da flexibilidade; $G_{exp}(i, i)$ refere-se ao i -ésimo elemento diagonal da matriz de flexibilidade danificada; Δh é o comprimento do elemento ou a distância entre os pontos medidos.

A diferença entre a curvatura da flexibilidade DF_C para a estrutura no estado intacto e danificado ajudam a realçar a localização do dano estrutural. Na Equação (9), m representa o número de GDL medidos.

0.5 Multiplicação da diferença na curvatura dos modos (MDCM)

Esse método é baseado na proposta de Genovese et al. (2000), com variação do original por utilizar a diferença na curvatura dos modos e não apenas a multiplicação das referidas curvas. A proposta desse método é acentuar a diferença entre os picos apresentados pelo método da curvatura, deixando o resultado mais claro. Assim, a diferença entre as curvas para o estado intacto e danificado, obtidas pela Equação (3), são multiplicadas ponto a ponto.

0.6 Critério de confiança modal - MAC

O MAC é definido como uma constante escalar relativa ao grau de consistência entre dois vetores modais,

$$MAC_{ij} = \frac{|\phi_{E_i}^T \phi_{A_j}|^2}{(\phi_{E_i}^T \phi_{E_i})(\phi_{A_j}^T \phi_{A_j})} \quad (10)$$

onde, ϕ_{E_i} é o i -ésimo modo de vibração experimental e ϕ_{A_j} é o j -ésimo modo de vibração analítico.

Esse índice pode ser usado para verificar a qualidade do modelo analítico em representar os autovetores medidos experimentalmente. Além disso, é aplicado para determinar a correlação entre os modos da estrutura íntegra e danificada, indicando assim a presença de danos estruturais. A diagonal da matriz desse índice varia entre 0 e 1, em que 0 indica a ausência de correlação entre as variáveis comparadas e 1, uma correlação perfeita.

0.7 Vetor de localização de dano baseado na matriz de flexibilidade

Como a matriz de flexibilidade é a inversa da matriz de rigidez (K), o produto da matriz de flexibilidade experimental com a matriz de flexibilidade reduzida para uma estrutura sem dano, resultará na matriz identidade. Portanto, tem-se

$$J = G_{exp}K - I, \quad (11)$$

onde a matriz de localização J será nula caso a estrutura não possua danos, caso contrário a matriz será não nula.

O vetor de localização, R_j pode ser definido, de modo que a sua j -ésima componente corresponde ao modulo da soma dos valores que formam a j -ésima coluna da matriz J , então

$$R_j = \sum_{i=1}^m |J_{i,j}|, \quad (12)$$

onde m é o número total de GDL medidos, como já mencionado.

Ao ser realizada a diferença entre o vetor R da estrutura intacta e danificada, uma variação abrupta pode ser observada na posição referente ao GDL correspondente ao dano estrutural.

Resultados da localização de danos estruturais

Para gerar os resultados, será considerada uma viga de alumínio simplesmente apoiada de 1m de comprimento. A viga em questão foi discretizada pelo método dos elementos finitos em 20 elementos bidimensionais do tipo Euler-Bernoulli. Nos casos considerados neste trabalho, a mesma malha de elementos foi utilizada para aproximar o campo de deslocamentos e também o campo de coesão (dano). Foram adotados elementos com dois nós, onde cada ponto nodal possui dois GDL de deslocamento, um transversal e outro de rotação, e um parâmetro de coesão. A estrutura possui, portanto, um total de 21 nós, 40 GDL, devido às condições de contorno abordadas, e 21 parâmetros nodais de coesão.

A imposição do defeito à viga é realizada através de uma redução na altura relativa da seção transversal $h(x)/h_0$, nos nós contidos no interior das regiões defeituosas. Portanto, nos nós defeituosos tem-se $h(x)/h_0 < 1$, e nos nós onde não há danos, tem-se $h(x)/h_0 = 1$.

Na primeira simulação, Caso 1, consideraram-se duas posições de dano (0,15 e 0,75 m) e que todos os GDL transversais são medidos. Além disso, os sinais não estão contaminados por ruído. Ambos os danos simulados são de pequena severidade ($h(x)/h_0 = 0,96$).

As Figuras 1 e 2 apresentam os resultados obtidos para as técnicas: variação na matriz de flexibilidade, 1a e 2a; método da curvatura dos modos, 1b e 2b; índice de danos baseados na flexibilidade, 1c e 2c, e na curvatura dos modos, 1d e 2d; variação na curvatura da flexibilidade 1e e 2e; multiplicação da diferença na curvatura dos modos, 1f e 2f e, por último, vetor de localização de dano baseado na matriz de flexibilidade, 1g e 2g. Mostra-se na Figura 1 que, na ausência de ruído nos sinais, mesmo um cenário de dano duplo e de pouca intensidade foi localizado com boa exatidão.

Para o Caso 2, dano a 0,2 m da extremidade esquerda da viga, um nível de 1% de ruído foi incorporado aos modos de vibração considerados medidos. Pretende-se avaliar o desempenho dos métodos de localização frente às incertezas presentes em um experimento real. Deve-se destacar que o dano simulado nesse caso é mais severo do que no primeiro caso e que apenas uma posição da viga é afetada. Os resultados, para esse caso, são apresentados na Figura 2, onde é possível perceber que os métodos de localização de danos avaliados apresentaram dificuldade em fornecer a região afetada pela falha estrutural. Percebe-se que o resultado onde a área danificada fica melhor definida é dado pelo método MDCM. Para o Caso 3, onde a posição adotada no caso anterior é repetida e 3% de nível de ruído é incorporado aos modos de vibração, nenhum dos métodos estudados foi capaz de determinar com clareza a região afetada pelo dano estrutural e esses resultados não são apresentados aqui. Verificou-se, também, que os métodos analisados precisam de um número de pontos de medições elevado, não sendo adequado, mesmo para pequenos níveis de ruído, que apenas um subconjunto de GDL seja considerado. Considerando-se o cenário de dano descrito como Caso 1, a Tabela 1 apresenta um comparativo entre as frequências naturais para a estrutura com e sem dano. Apresenta-se também os valores para o MAC para a viga danificada. Considerando-se o Caso 2, os resultados obtidos pelo MAC e uma comparação entre os valores da frequência natural da estrutura intacta e danificada são apresentados na Tabela 2. Tanto os resultados apresentados para o Caso 1 quanto para o Caso 2 mostram que, para os cenários de danos simulados, o MAC apresentou pouca variação em seus valores quando a estrutura encontra-se danificada. Portanto, o MAC não pôde, nesses casos, ser utilizado como um indicador de danos.

Figura 1: - Localização de danos para o Caso 1

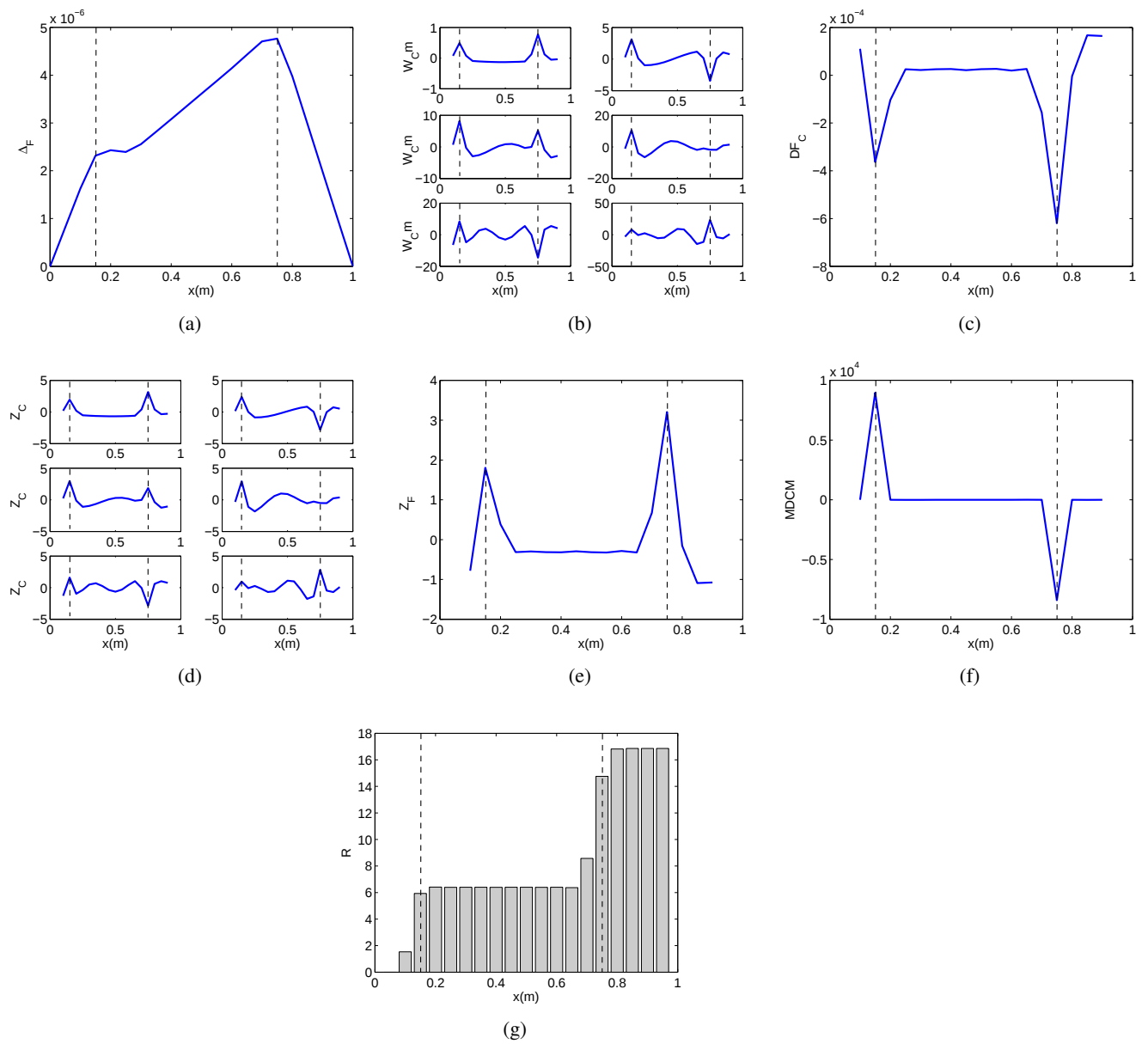


Tabela 1: - Comparações entre a estrutura intacta e danificada para o Caso 1

Modo de Vibração	Frequência Natural sem dano (Hz)	Frequência Natural com dano (Hz)	MAC
1	11,7335	11,6892	1,0000
2	46,9343	46,5286	1,0000
3	105,6051	104,8004	0,9999
4	187,7562	186,8569	0,9999
5	293,4138	291,8828	0,9999
6	422,6319	420,2668	0,9999

Figura 2: - Localização de danos para o Caso 2

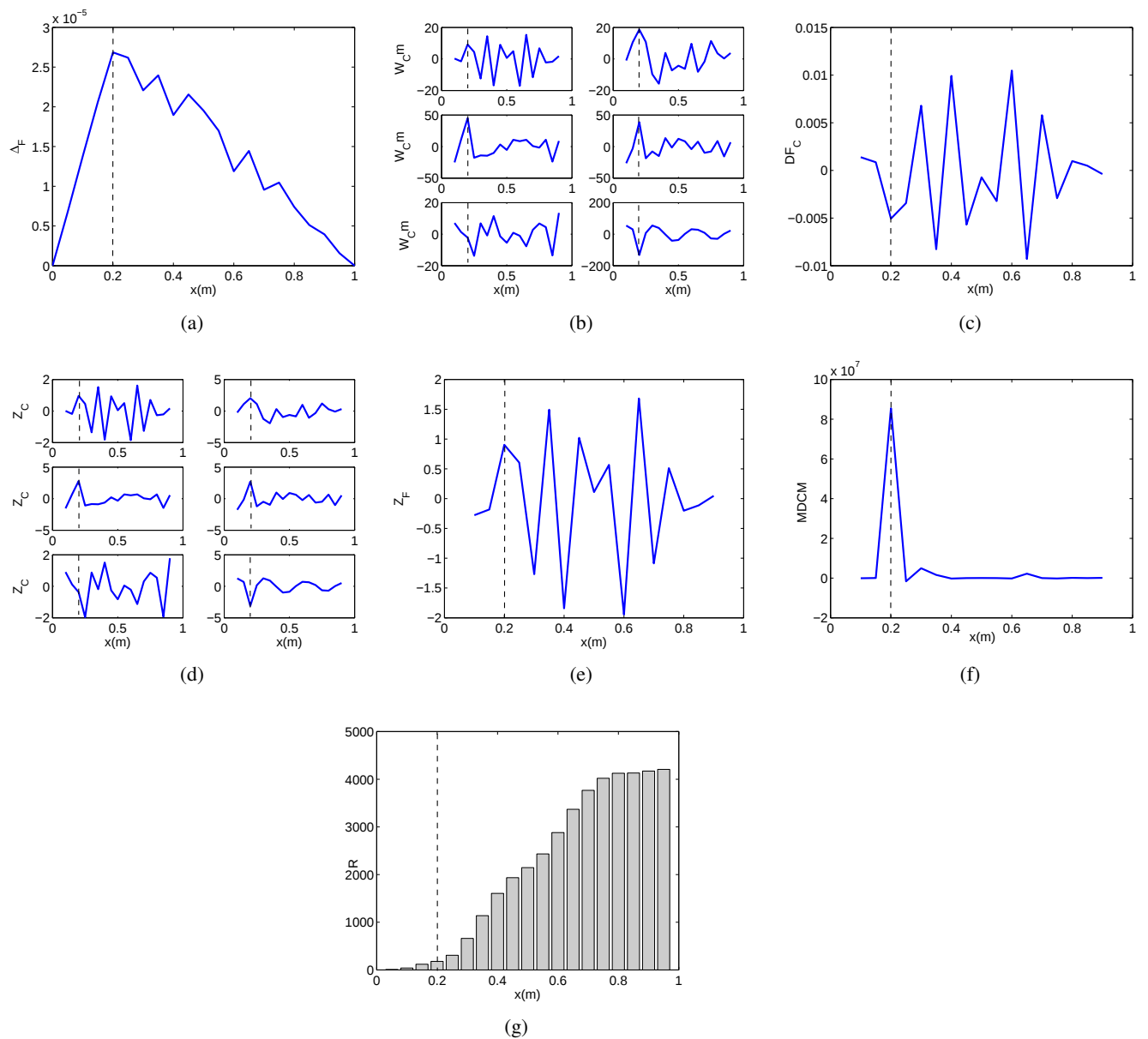


Tabela 2: - Comparações entre a estrutura intacta e danificada para o Caso 2

Modo de Vibração	Frequência Natural sem dano (Hz)	Frequência Natural com dano (Hz)	MAC
1	11,7335	11,5794	0,9999
2	46,9343	45,4147	0,9986
3	105,6051	102,4841	0,9975
4	187,7562	185,5562	0,9986
5	293,4138	292,5660	0,9999
6	422,6319	416,9899	0,9956

Diante dos resultados obtidos com os métodos de localização para os casos de danos avaliados, pode-se afirmar que nenhum deles foi eficiente em determinar a região afetada por um dano estrutural na presença de dados ruidosos. Apenas para o caso onde uma posição de dano é considerada e 1% de ruído é acrescentado, o método MDCM foi capaz de indicar a região danificada. No entanto, mesmo esse método, não conseguiu apontar a região danificada para um nível de ruído de 3%.

Conclusões

Métodos de identificação de danos estruturais, comumente são encarados como um problema de minimização de um funcional baseado na diferença entre características experimentais e da estrutura intacta, o que geralmente é feito utilizando-se o método dos elementos finitos (MEF). O problema de minimização envolvido, normalmente é resolvido por meio de métodos de otimização estocástica, devido a características provenientes do experimento, como dados incompletos e ruídos de medição. Apesar de encontrarmos na literatura muitos métodos eficientes de otimização estocástica, é sabido que muitas vezes eles podem ter alto custo computacional diante de um número elevado de variáveis do problema a ser minimizado. Como a discretização via MEF de uma estrutura complexa envolve muitos pontos da estrutura onde pode haver um dano, os métodos de otimização utilizados precisam lidar com muitas variáveis. Assim, seria muito útil se algum método mais simples, baseado apenas em características da estrutura como frequências naturais e modos de vibração, fosse capaz de nos fornecer a região potencialmente afetada pelo dano. Com isso, os métodos de otimização seriam utilizados em uma reduzida região estrutural, diminuindo-se assim o número de variáveis do problema. No entanto, diante dos resultados expostos no presente trabalho, verifica-se que nenhum dos métodos de localização de danos, baseados na matriz de flexibilidade estrutural ou na curvatura dos modos de vibração, foi capaz de localizar a região afetada pelo dano quando um número reduzido de GDL e dados ruidosos são considerados. Tais considerações são fundamentais para tornar a simulação mais realística. Dessa forma, uma alternativa a ser testada para conseguir diminuir o número de variáveis é a utilização de Redes Neurais Artificiais.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

Referências

- GENOVESE, M. E.; BRITO, J.L.V.; DOZ, G.N. Avaliação da Integridade Estrutural **Anais do 2º Congresso internacional sobre o comportamento de estruturas danificadas**, DAMASTRUC, 2000.
- JAUREGUI, D. V.; FARRAR, C. R. Comparison of damage identification algorithms on experimental modal data from a bridge. **14th International Modal Analysis Conference Dearborn**. Michigan February 12-15, 1996.
- LU, Q.; REN, G.; ZÃO, Y. Multiple damage location with flexibility curvature and relative frequency change for beam structures. **Journal of Sound and vibration**, Vol. 253, n. 5, pp. 1101–1114, 2002.
- PANDEY, A.; BISWAS, M.; SAMMAN, M.M. Damage detection from changes in curvature mode shapes. **Journal of sound and Vibration**, Vol. 145, 2 pp. 321–332, 1991.
- PANDEY, A.; BISWAS, M. Damage detection in structures using changes in flexibility. **Journal of sound and Vibration**, Vol. 169, pp. 3–17, 1994.
- TOMASZEWSKA, A. Influence of statistical errors on damage detection based on structural flexibility and mode shape curvature. **Computers and Structures**. Vol. 88, pp. 154–164, 2010.

Determinação dos parâmetros da equação de Antoine para o Metano e o Álcool Isopropílico utilizando a Evolução Diferencial

Vitor Salles Bittencourt Muniz

*Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ – Nova Friburgo, RJ
vitor.muniz@aluno.cefet-rj.br*

Igor Meirelles Martins

*Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ – Nova Friburgo, RJ
igor.martins@aluno.cefet-rj.br*

Daniel Gomes Ribeiro

*Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ – Nova Friburgo, RJ
daniel.ribeiro@cefet-rj.br*

Ademilton Luiz Rodrigues de Souza

*Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ – Nova Friburgo, RJ
ademilton.souza@cefet-rj.br*

Leonardo de Souza Grigorio

*Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, CEFET/RJ – Nova Friburgo, RJ
leonardo.grigorio@cefet-rj.br*

Resumo: A Evolução Diferencial (ED) é um método de otimização, da classe dos Algoritmos Evolucionários, inspirado em princípios da evolução biológica e utiliza dos operadores de mutação, cruzamento e seleção dos indivíduos de uma mesma população para realizar a busca pela solução ótima. Numa direção diferente dos métodos de otimização, alguns modelos termodinâmicos, como a equação de Antoine, relacionam a pressão de vapor saturado com a temperatura através de uma relação matemática analítica. Neste artigo, foi utilizado o algoritmo da ED na determinação dos coeficientes da equação de Antoine para o Metano e o Álcool Isopropílico a fim de serem comparados com os parâmetros encontrados na literatura. Para tal, foram utilizados dados experimentais disponíveis no Dortmund Data Bank (DDB). Foram observadas que as previsões de pressão calculadas utilizando-se os parâmetros obtidos pela ED apresentaram uma maior concordância com os dados experimentais quando comparadas com as previsões obtidas através dos parâmetros consultados na literatura.

Palavras-chave: Equação de Antoine. Evolução Diferencial. Metano. Álcool Isopropílico.

Introdução

Os Algoritmos Evolucionários (AEs) são métodos de otimização que podem ser facilmente utilizados em problemas em que, a priori, o comportamento da função em todo o domínio é desconhecido ou de difícil análise. Os AEs são inspirados na evolução biológica e utilizam de um conjunto de vetores ou de indivíduos para encontrar a solução ótima (DAS; SUGANTHAN, 2011). Cada indivíduo dessa população é uma solução em potencial e, após uma série de avaliações dos indivíduos na função objetivo, a solução ótima do problema é encontrada.

Bem como os AEs, a Evolução Diferencial (ED) é um método estocástico de otimização em que a solução ótima é encontrada através da mutação, cruzamento e seleção dos indivíduos de uma população. A ED tem se tornado popular nos últimos anos devido a sua boa convergência, fácil implementação e amplo uso em problemas em que a função é não diferenciável, multimodal ou complexa (KARABOĞA; ÖKDEM, 2004).

Uma das possíveis aplicações da *ED* é na otimização de modelos termodinâmicos que representam fenômenos que envolvem calor e outras formas de energia. Segundo Thomson (1946), a equação de Antoine é uma dentre várias equações existentes que relacionam a pressão de vapor saturado com a temperatura e ela descreve o comportamento de sistemas em que a pressão exercida pela fase vapor de uma substância, em um recipiente fechado, está em equilíbrio termodinâmico com o líquido gerador (RODGERS; HILL, 1978).

No presente estudo, foi aplicado o algoritmo da Evolução Diferencial na identificação de parâmetros presentes na equação de Antoine para o Metano e o Álcool Isopropílico. Para tal, foram utilizados dados experimentais de pressão de vapor saturado e de temperatura disponíveis no Dortmund Data Bank (*DDB*).

Problema de Otimização da Equação de Antoine

A pressão de vapor saturado é um fenômeno físico que ocorre nas fases líquido-vapor de uma substância presente em um recipiente fechado. Em síntese, uma quantidade de moléculas da fase líquida da substância vai evaporar enquanto que uma parte das moléculas da fase vapor da substância vão condensar (JESPERSEN, 2014). Quando a taxa com que as moléculas da fase líquida evaporam for igual a taxa com que as moléculas da fase vapor condensam, é dito que o sistema está em um equilíbrio termodinâmico.

Para aumentar a taxa com que as moléculas evaporam, é necessário aumentar a temperatura do sistema que, conseqüentemente, irá aumentar a pressão no recipiente e causará um aumento na taxa com que as moléculas condensam (JESPERSEN, 2014). Por fim, a pressão de vapor saturado vai depender da natureza da substância e da temperatura do sistema.

O modelo mais recomendado para uso geral que relaciona a pressão de vapor saturado com a temperatura é a equação de Antoine que foi proposto em 1888 pelo engenheiro francês Louis Charles Antoine (THOMSON, 1946). A equação de Antoine é uma função semi-empírica obtida da equação de Clausius-Clapeyron e é mostrada na Equação (1). Os parâmetros A, B e C são obtidos de dados experimentais e variam de acordo com a substância e com a temperatura do sistema (RODGERS; HILL, 1978).

$$P = 10^{A - \frac{B}{C+T}} \quad (1)$$

Geralmente, para uma mesma substância, são utilizados dois conjuntos de constantes, um conjunto que vai do ponto triplo ao ponto de ebulição e outro conjunto que vai do ponto de ebulição ao ponto crítico (THOMSON, 1946). As unidades da Equação (1) dependem dos coeficientes, mas, na maioria dos casos, os valores de P e T são dados, respectivamente, em milímetros de mercúrio e em Kelvin.

Já o problema inverso da equação de Antoine, consiste em encontrar os parâmetros A, B e C que melhor se ajustam a um conjunto de dados experimentais. Neste estudo, utilizou-se a função objetivo de minimização da Equação (2), em que P_{exp} é a pressão experimental, P_{cal} é a pressão calculada através da Equação (1) e n é o número total de medidas experimentais.

$$MIN = \sum_{i=1}^n (P_{exp,i} - P_{cal,i})^2 \quad (2)$$

Para minimizar a Equação (2), foi utilizado o algoritmo da Evolução Diferencial e foram usados dados experimentais de pressão de vapor saturado disponíveis no Dortmund Data Bank. Para o metano, foram utilizados 68 valores de pressão e temperatura com $T \in [-160,8; -83,05]$ °C e para o Álcool

Isopropílico foram utilizados 66 dados experimentais com $T \in [85,09; 202,36]$ °C (DORTMUND DATA BANK, 2018).

Com o objetivo de verificar a qualidade dos resultados que seriam obtidos pela *ED*, os dados experimentais de cada substância foram divididos em dois grupos: um grupo de determinação dos parâmetros e outro de validação, sendo os dados escolhidos aleatoriamente dentro do conjunto total de dados disponíveis. O primeiro conjunto foi utilizado na regressão da equação de Antoine a fim de se determinar as constantes A, B e C de cada substância. O segundo grupo, de validação, foi utilizado para verificar a qualidade dos resultados encontrados pelo algoritmo da *ED* através de uma análise gráfica e numérica. Para o Metano, cada conjunto teve 34 dados, enquanto que no Álcool Isopropílico, cada conjunto teve 33 dados.

Evolução Diferencial

O algoritmo da *ED* foi proposto em 1995 por Storn e Price e realiza a otimização através de uma busca paralela e direta (STORN; PRICE, 1995). Inicialmente, são especificados os parâmetros do algoritmo, sendo que, na versão clássica, são utilizadas apenas três variáveis: a probabilidade de cruzamento *CR*, o tamanho da população *Np* e a taxa de perturbação *F* (STORN; PRICE, 1997). Nesta etapa também podem ser especificados o número máximo de gerações (*G*) e os limites inferiores (*L_{INF}*) e superiores (*L_{SUP}*) de cada parâmetro do problema.

Depois de serem definidas as variáveis do algoritmo é inicializada uma população de *Np* indivíduos aleatórios como mostrado na Equação (3):

$$\vec{x}_{j,i,0} = \vec{L}_{j,INF} + rand_j(0,1) * (\vec{L}_{j,SUP} - \vec{L}_{j,INF}) \quad (3)$$

em que $\vec{x}_i$ é o *i*-ésimo indivíduo da população, conhecido como indivíduo alvo, $\vec{L}_{SUP}$ e $\vec{L}_{INF}$ são, respectivamente, os vetores com os limites superiores e inferiores, $rand_j(0,1)$ é um número aleatório gerado entre 0 e 1 e $j = 1, 2, 3, \dots, D$, sendo *D* o número de dimensões do problema.

Após a população inicial ser criada, para cada indivíduo da população, são gerados novos vetores através do operador de mutação, utilizando a soma da diferença ponderada entre dois vetores a um terceiro como mostrado na Equação (4).

$$\vec{v}_{i,G} = \vec{x}_{r1,G} + F * (\vec{x}_{r2,G} - \vec{x}_{r3,G}) \quad (4)$$

Sendo $\vec{v}$ o vetor criado na mutação, conhecido como indivíduo doador, $\vec{x}_{r1,G}$, $\vec{x}_{r2,G}$ e $\vec{x}_{r3,G}$ são indivíduos diferentes entre si e do indivíduo atual da população, escolhidos aleatoriamente, e $F \in [0,2]$. Note que, quando os vetores estiverem se aproximando da solução ótima, a diferença ponderada presente na Equação (4) irá diminuir automaticamente. Assim, o intervalo de busca de cada parâmetro irá ser ajustado de acordo com os indivíduos (GÄMPERLE; KOUMOUTSAKOS, 2002).

Com o operador de cruzamento, são gerados novos indivíduos, chamados de experimentais, a partir do cruzamento dos indivíduos doadores e dos indivíduos alvos. Para tal, é gerado um número aleatório *Y* para cada dimensão do problema. Se este número for menor ou igual a *CR*, o indivíduo experimental herda o valor da componente *j* do vetor doador. Caso contrário, ele herda o valor do vetor alvo. O modelo matemático deste operador é dado pela Equação (5).

$$\vec{u}_{j,i,G} = \begin{cases} \vec{v}_{j,i,G} & \text{se } Y \leq CR \text{ ou } j = rn_i \\ \vec{x}_{j,i,G} & \text{se } Y > CR \text{ e } j \neq rn_i \end{cases} \quad (5)$$

Em que $Y \in [0,1]$, rn_i é um índice escolhido aleatoriamente em $[1, D]$ para cada indivíduo da população e $CR \in [0,1]$. A igualdade $j = rn_i$ certifica que o indivíduo experimental receberá pelo menos um cromossomo do indivíduo doador.

Após a mutação e o cruzamento, os indivíduos experimentais e os alvos são avaliados na função objetivo. Se o problema for de minimização e o indivíduo experimental apresentar um resultado menor na função objetivo, ele substitui o indivíduo alvo na população e é utilizado na próxima geração. Na Equação (6), a seguir, é mostrado o operador de seleção.

$$\vec{x}_{i,G+1} = \begin{cases} \vec{u}_{i,G} & \text{se } f(\vec{u}_{i,G}) \leq f(\vec{x}_{i,G}) \\ \vec{x}_{i,G} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

No qual $\vec{u}_i$ é o i -ésimo indivíduo experimental, $\vec{x}_i$ é i -ésimo indivíduo alvo e G é a geração atual.

Em seguida, o algoritmo avança uma geração e são repetidos os operadores de mutação, cruzamento e seleção até que algum critério de parada seja atingido. Neste trabalho foi utilizado o número máximo de gerações como critério de parada.

Resultados

Para encontrar os parâmetros de Antoine das substâncias foram utilizados os seguintes parâmetros: $Np = 50$, $F = 0,8$, $CR = 0,85$ e $G = 600$. Para o intervalo do espaço de busca foram utilizados como referência os coeficientes de Antoine disponíveis no *DDB*. Assim, o intervalo de cada constante empregado no algoritmo foi: $A \in [1,50]$, $B \in [50,5000]$ e $C \in [50,5000]$.

A Tabela 1 apresenta os resultados encontrados para as duas substâncias com os parâmetros da literatura (*DDB*) e com os parâmetros obtidos neste trabalho (DE/rand/1/bin). Na quinta coluna destacam-se os valores mínimos quando as constantes e o conjunto de validação são aplicados na função objetivo. Na penúltima coluna, são mostrados os erros relativos médios percentuais entre as pressões calculadas e as pressões do conjunto de validação.

Tabela 1 – Resultados encontrados para os parâmetros utilizando dados de Pressão (mmHg) e Temperatura (°C).

Substância	A	B	C	MIN (x10 ⁶)	Erro (%)	Referência
Álcool	7,9584	1519,66	216,829	4,467505	2,7935	DDB
Isopropílico	7,6719	1383,77	208,795	0,517351	1,8350	DE/rand/1/bin
Metano	6,7021	394,48	264,609	5,469397	2,6493	DDB
	7,0121	490,15	280,500	3,668051	1,6545	DE/rand/1/bin

Da Tabela 1, nota-se que os valores mínimos obtidos na função objetivo foram menores com os coeficientes encontrados pelo algoritmo. Consequentemente, o erro relativo médio percentual também foi menor. Assim, as pressões calculadas com os coeficientes encontrados pelo algoritmo aproximaram-se melhor do conjunto de dados do grupo de validação. Nas Figuras 1 e 2 são mostradas as curvas das pressões calculadas com os parâmetros encontrados, com as constantes da literatura e as pressões do conjunto de validação das respectivas substâncias.

Nas Figuras 3 e 4 são mostrados os erros relativos percentuais entre as pressões calculadas e as experimentais do conjunto de validação.

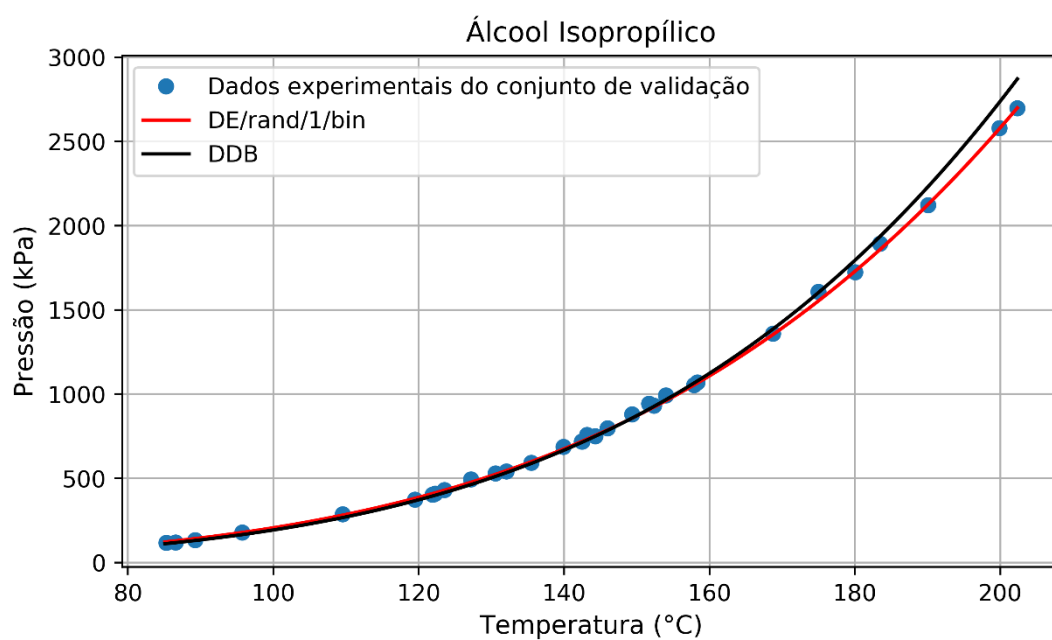


Figura 1 – Pressões experimentais e as calculadas pela equação de Antoine para o conjunto de validação do Álcool Isopropílico.

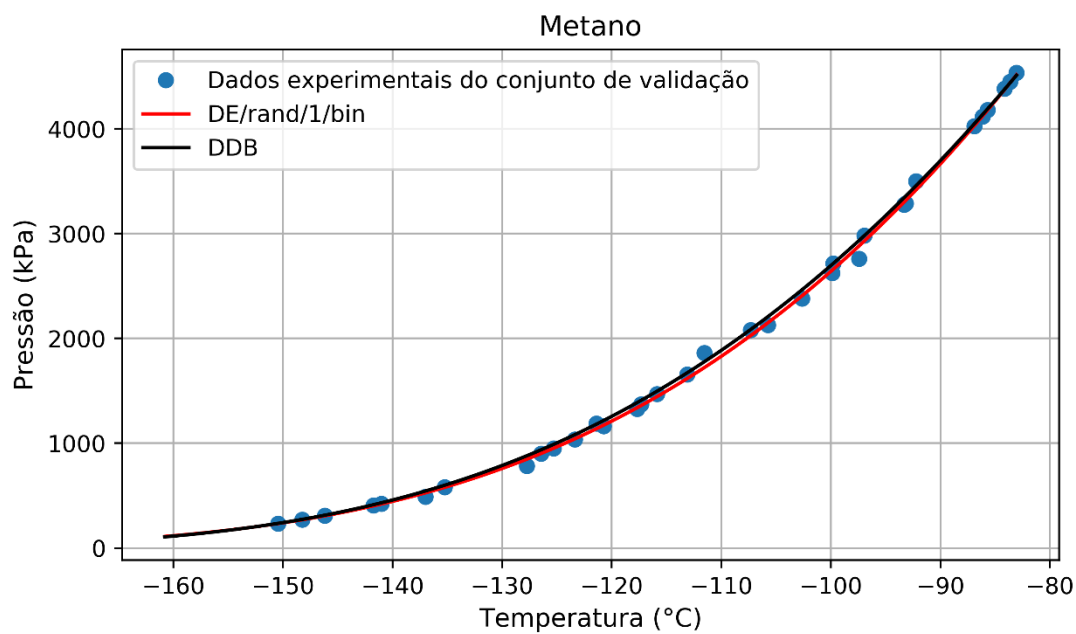


Figura 2 – Pressões experimentais e as calculadas pela equação de Antoine para o conjunto de validação do Metano.

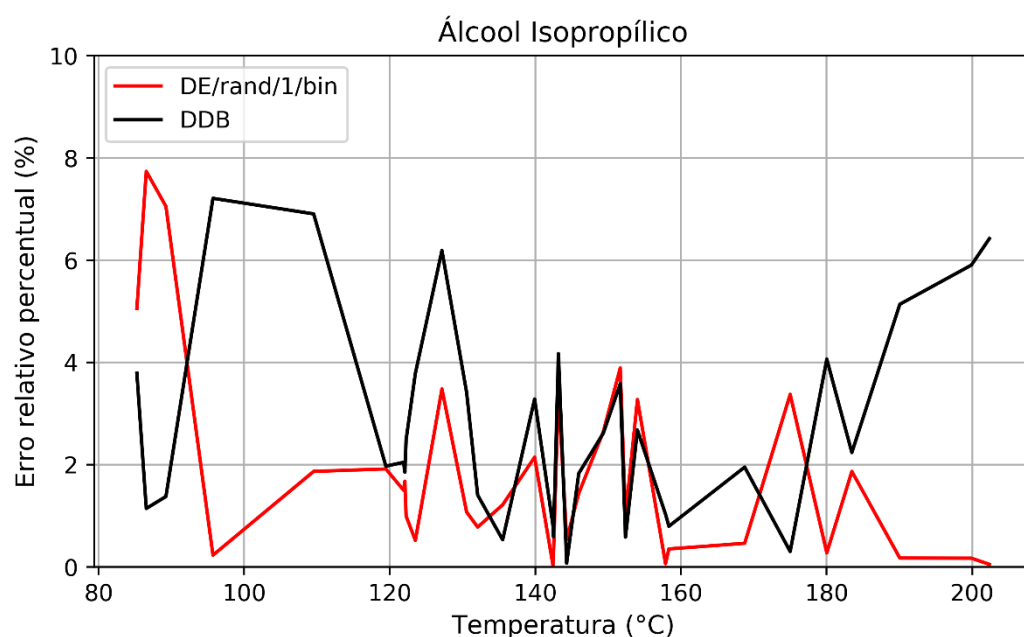


Figura 3 – Erro relativo percentual entre as pressões experimentais e as calculadas pela equação de Antoine para o conjunto de validação do Álcool Isopropílico.

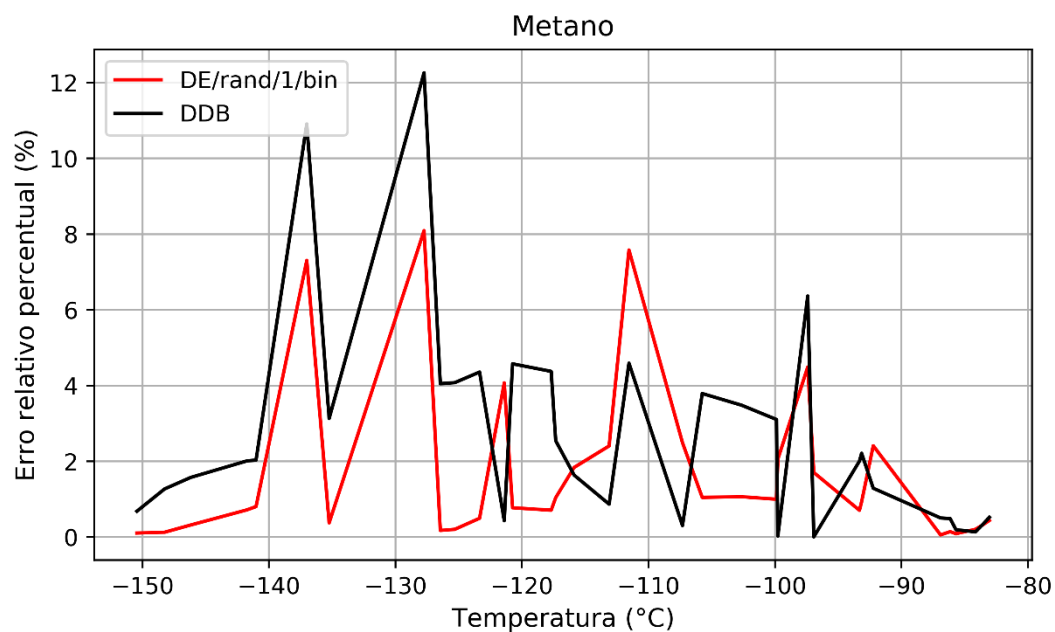


Figura 4 - Erro relativo percentual entre as pressões experimentais e as calculadas pela equação de Antoine para o conjunto de validação do Metano.

As Figuras 3 e 4 demonstram que, em determinados pontos, as pressões obtidas com os coeficientes encontradas pelo algoritmo resultaram em um erro relativo percentual menor, porém, em certos pontos também foram obtidos erros relativos percentuais maiores se comparados com as pressões calculadas com os coeficientes da literatura.

Conclusão

Através das análises gráficas e numéricas das pressões, foi possível constatar que os coeficientes encontrados pelo algoritmo da *ED* apresentaram uma maior concordância com os dados experimentais ao serem aplicados à equação de Antoine quando confrontados com os coeficientes da literatura. Como consequência da boa convergência das pressões, resultantes da boa determinação das constantes, houve uma diminuição do erro relativo médio percentual entre as previsões das pressões calculadas com as constantes da literatura e das constantes encontradas neste trabalho.

Para trabalhos futuros especula-se fazer a análise de novas substâncias, com o emprego da Evolução Diferencial ou de outras técnicas estocásticas de otimização como o algoritmo de colisão de partículas, onde, segundo Lobato et al. (2010), a sua principal vantagem em relação aos outros métodos é que é necessário especificar apenas o tamanho da população para que um problema seja otimizado.

Referências

- DAS, S.; SUGANTHAN, P. N. Differential evolution: a survey of the state-of-the-art. **IEEE transactions on evolutionary computation**, 15(1), 4-31, 2011.
- DORTMUND DATA BANK. **Thermophysical properties of pure component and mixtures**. 2018. Disponível em: < <http://www.ddbst.com> >. Acesso em: 10 set. 2018.
- GÄMPERLE, R.; MÜLLER, S. D.; KOUMOUTSAKOS, P. A parameter study for differential evolution. **Advances in intelligent systems, fuzzy systems, evolutionary computation**, 10(10), 293-298, 2002.
- JESPERSEN, N. D. **Barron's AP Chemistry**. 7. ed. New York: Barron's Educational Series, 2014.
- KARABOĞA, D.; ÖKDEM, S. A simple and global optimization algorithm for engineering problems: differential evolution algorithm. **Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences**, 12(1), 53-60, 2004.
- LOBATO, F. S., et al. **Algoritmo de Colisão de Partículas Aplicado ao Projeto de Sistemas de Engenharia**. 2010.
- RODGERS, R. C.; HILL, G. E. Equations for vapour pressure versus temperature: derivation and use of the Antoine equation on a hand-held programmable calculator. **British journal of anaesthesia**, 50(5), 415-424, 1978.
- STORN, R.; PRICE, K. **Differential evolution-A simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces [R]**. 1995. Berkeley: ICSI.
- STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. **Journal of global optimization**, 11(4), 341-359, 1997.
- THOMSON, G. W. The Antoine equation for vapor-pressure data. **Chemical reviews**, 38(1), 1-39, 1946.

UTILIZAÇÃO DE UM JOGO E UM VÍDEO EDUCATIVO PARA ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Ana Paula Santos Pereira
Universidade Federal do Espírito Santo
anapaulasantospereira5@gmail.com

Edson Ribeiro dos Santos de Almeida Júnior
Universidade Estadual de Maringá
erbaj@gmail.com

Filipe de Oliveira Barbosa
Universidade Federal do Espírito Santo
barbosa.filipe@outlook.com.br

Valdinei Cezar Cardoso
Universidade Federal do Espírito Santo
v13dinei@gmail.com

RESUMO

O presente trabalho aborda sobre a produção e a aplicação do jogo *Máquina Mágica*, e de um vídeo intitulado *A noção de função*, que tratam sobre o conceito de função. O jogo foi desenvolvido no *software Scratch 2.0* e o vídeo produzido no *software Windows Movie Maker*, ambos criados pelos autores. O objetivo do trabalho é investigar se é possível utilizar o vídeo e o jogo digital como ferramentas para desenvolver o conceito de função em alunos do primeiro ano do Ensino Médio. O jogo e o vídeo foram aplicados para um grupo de quatro alunos do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual do município de São Mateus-ES. Após a apresentação das mídias foi aplicada uma atividade para examinar se os alunos haviam compreendido a noção de função. Os resultados indicam que a interação com o jogo e o vídeo digital constituiu como uma forma diversificada e atrativa de aprender o conceito de função.

Palavras-chave: Scratch. Máquina Mágica. Mídias.

INTRODUÇÃO

A tecnologia faz parte da rotina dos alunos, mesmo que alguns não tenham aparelhos eletrônicos ou computadores, a maioria se depara com as novidades tecnológicas no seu cotidiano. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), (BRASIL, 1999, p. 50) “[...] A tecnologia no aprendizado escolar deve constituir-se também em instrumento da cidadania, para a vida social e para o trabalho. [...]”. Assim, é de grande importância que a escola vincule diferentes recursos tecnológicos ao processo de ensino, de forma que todos os alunos tenham acesso a tecnologia.

Pensando nisso, elaboramos um vídeo e um jogo digitais que serviram de material didático para uma atividade de função, envolvendo alunos do ensino básico. Segundo Borba e Penteadó (2007, p. 45) uma mídia “[...] abre possibilidades de mudanças dentro do próprio

conhecimento e é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento”.

Levando tudo isso em consideração, nosso trabalho tem como objetivo identificar possibilidades metodológicas de integrar jogos e vídeos digitais, para o ensino e a aprendizagem do conceito de função.

METODOLOGIA

Produzimos um vídeo e um jogo digital, relacionados ao conceito de função, nossa intenção ao produzir tais mídias foi de apresentar aos estudantes uma forma diversificada de aprender o conceito de função, além de investigar possíveis contribuições dessas mídias para o ensino e a aprendizagem desse conceito.

O vídeo e o jogo foram aplicados em um grupo de alunos de uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, em uma escola da rede pública estadual do município de São Mateus, Espírito Santo. Foram escolhidos apenas 4 alunos pela professora regente devido à falta de recursos computacionais na escola, o critério de escolha foi baseado no desempenho acadêmico dos alunos, sendo que um possuía baixo rendimento na disciplina, dois possuíam rendimento médio e um tinha alto rendimento. As atividades foram realizadas no horário de aula dos alunos.

O vídeo¹ *A Noção de Função* tem duração de 7min e 58s, foi usado como base teórica para que os estudantes pudessem revisar e adquirir novos conhecimentos acerca do conceito de função. O jogo foi utilizado como objeto motivador e aplicação direta do conhecimento adquirido por meio do vídeo.

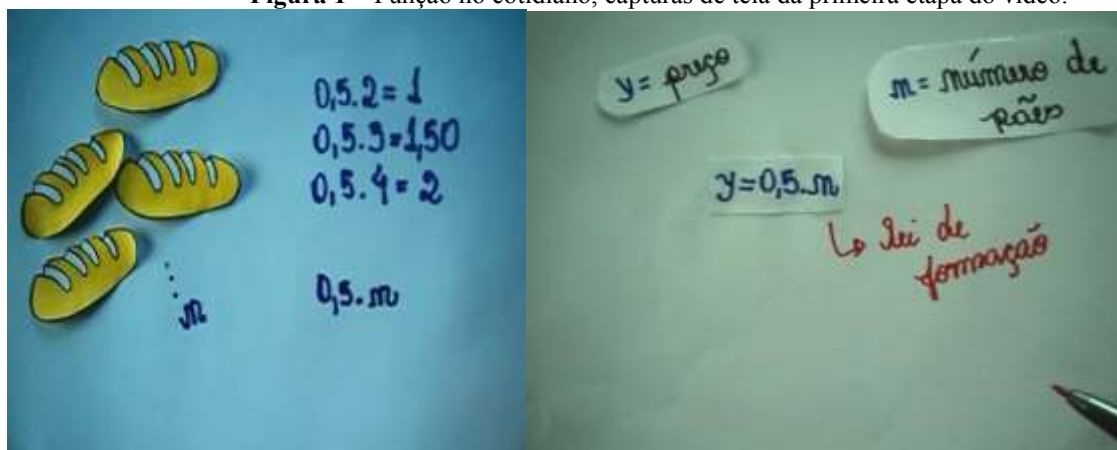
O vídeo foi elaborado no software Windows Movie Maker e nele contém filmagens da mão de um dos autores escrevendo e há também exibições de esquemas.

Para produzi-lo foram utilizados os seguintes materiais: Caneta (marcador para retroprojector); Tesoura; Folha de sulfite A4 de cor branca; Cola branca; Suporte celular universal articulado pescoço ganso; Câmera digital Sony Cyber-Shot DSC-W310 12.1MP.

O vídeo¹ foi dividido em duas etapas, a primeira consiste em um exemplo de função no cotidiano, onde foi discutido o preço do pão em uma padaria, mostrando que o preço é função do número de pães e exibindo uma sentença matemática para expressá-la. Além de enfatizar que é possível calcular o preço para qualquer quantidade de pães ou saber o número de pães que se pode comprar com certa quantidade de dinheiro (Figura 1).

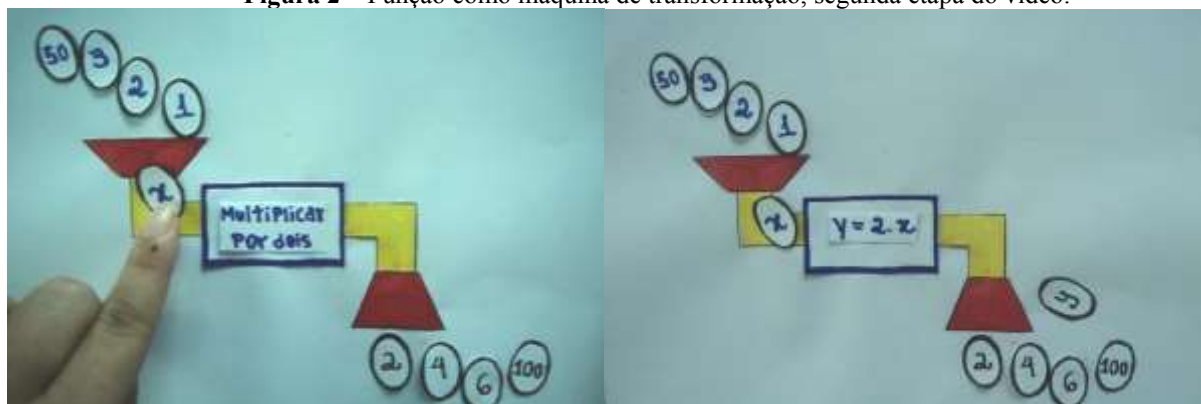
¹

https://www.youtube.com/watch?v=fGp6ulOYO_Y

Figura 1 – Função no cotidiano, capturas de tela da primeira etapa do vídeo.

Fonte: Dos autores, 2018

Na segunda etapa foi abordado o conceito de função como uma máquina de transformação. Em um dos exemplos a máquina está programada para multiplicar por dois, logo todo elemento que entra na máquina é duplicado gerando um único elemento de saída. Então se x representar o número de entrada e y o número de saída, pode-se trocar o comando da máquina “multiplicar por dois” pela lei de formação $y=2x$ (Figura 2).

Figura 2 – Função como máquina de transformação, segunda etapa do vídeo.

Fonte: Dos autores, 2018

O jogo *Máquina Mágica* foi desenvolvido no *Scratch 2.0*. Esse *software*, criado e desenvolvido pelo Grupo *Lifelong Kindergarten* do Laboratório de Mídia do Instituto de Tecnologia de Massachusetts, é gratuito e mais acessível do que outras linguagens de programação, por não exigir conhecimentos prévios de programação e ser compatível com diversos sistemas operacionais, tais como Windows, Linux e Mac OS X. O *Scratch 2.0* possibilita a construção de jogos digitais, animações, simuladores, entre outros recursos, tudo isso utilizando uma construção intuitiva de algoritmos computacionais (ALMEIDA JUNIOR; CARDOSO; KATO, 2017).

O jogo conta com 3 níveis de dificuldades: fácil, intermediário e difícil. No nível fácil, os problemas estão relacionados a associações de objetos ou de números inteiros, com problemas simples que possibilitam o amadurecimento do conceito de função, servindo como base para avançar nos demais níveis do jogo. No nível intermediário, será abordado o conceito de domínio, contradomínio e imagem. No nível avançado serão trabalhados os conceitos de funções inversas.

Neste trabalho utilizamos apenas o nível fácil, pois nosso objetivo era desenvolver o conceito de função por meio de associações de objetos e números. Nele, os alunos tinham que descobrir qual objeto sairia da máquina, baseado no que entrou e na descrição informada pela máquina. O jogo possui um menu simples e atrativo, nele o aluno tem duas opções, a primeira é o início do jogo e a segunda possui informações de como jogar (Figura 3).

Figura 3 - Menu principal do jogo Máquina Mágica



Fonte: Dos autores, 2018

Ao clicar em Iniciar, o jogador escolhe o nível de dificuldade e em seguida o jogo começa. Na parte inferior da tela do jogo (Figura 3 (III)) é mostrada pontuação do jogador, de acordo com o número de acertos alcançados.

Antes de apresentar o vídeo, conversamos com os alunos para identificar o conhecimento prévio acerca do conceito de funções. Essa conversa informal foi registrada por meio de gravação e aconteceu no laboratório de informática da escola, com duração de aproximadamente 10 min. Ao questionar o que eles entendiam como função, todos os alunos se recordaram dos símbolos matemáticos, afirmando: “função é $f(x)$ ”. Desta maneira, entende-se, que apesar de terem estudado o conteúdo, ainda não conseguem explicá-lo com maior riqueza de detalhes.

Ao perguntarmos aos alunos a respeito de exemplos de funções em seu cotidiano, nenhum deles conseguiu responder. Desta forma, para introduzir o conceito, fizemos uma breve explicação do conteúdo de funções, apresentando alguns exemplos de funções no cotidiano e propomos a eles que assistissem ao vídeo para conhecerem um pouco mais acerca

deste conceito. Para isso, cada aluno usou um computador da sala de informática, pedimos para que utilizassem um fone de ouvido para melhor concentração.

Após assistirem ao vídeo, eles tiveram um momento para descontrair e debater sobre ele, em seguida, introduzimos outra discussão para iniciar a aplicação do jogo. O jogo contou com 9 fases de nível fácil, pois o objetivo principal era que eles compreendessem o conceito inicial de função, sem a necessidade de abordar conceitos como função inversa, função composta etc.

Antes de executar o jogo, pedimos a eles para que tentassem estabelecer relações entre o conteúdo visto no vídeo e situações de seu cotidiano com as fases do jogo. Dentre as fases do jogo, 5 delas são associações de objetos do cotidiano do aluno, como: frutas, doces e entre outros e 4 são associações de números. No decorrer do jogo os alunos usaram lápis e papel para tentar auxiliar nas fases que possuíam números. Cada partida durou cerca de 30 minutos, sem nenhum tipo de pausa ou intervenções.

Depois de apresentar o vídeo e aplicar o jogo, apresentamos aos estudantes uma atividade² individual com o objetivo de verificar o potencial educativo dessas mídias e a aprendizagem do conteúdo de funções por meio delas. A atividade era composta por duas questões sobre o conteúdo de funções, ambas foram retiradas de livros didáticos. A primeira é referente ao vídeo e foi escolhida por ser semelhante a um de seus problemas e teve como propósito verificar se o aluno era capaz de generalizar a situação do problema estabelecendo uma lei de formação. A segunda era referente ao jogo e foi escolhida por tratar o conceito de funções de forma lúdica e por ter semelhança com as associações vista nas fases do jogo.

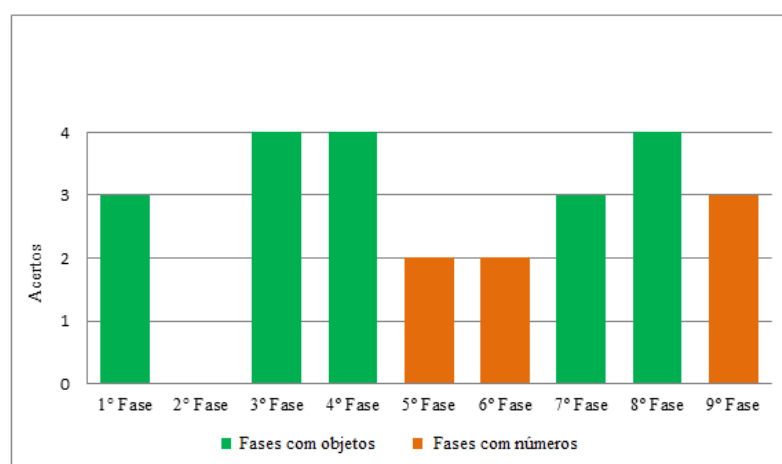
E por fim, discutimos junto aos participantes a respeito das impressões que tiveram sobre as mídias digitais, bem como as dificuldades ou facilidades que tiveram com a atividade e com o jogo, neste momento eles relataram suas opiniões que foram gravadas em áudio.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Segundo os alunos, as fases do jogo que tinham objetos do cotidiano foram mais fáceis de resolver, também foi possível perceber que a quantidade de tempo gasta para concluir essas fases era menor do que a quantidade de tempo para concluir as fases que envolviam apenas números.

Além disso, os alunos necessitaram de papel e caneta para auxiliá-los nas fases numéricas. No geral, os alunos obtiveram bons resultados no jogo, todos eles conseguiram concluir as questões 3, 4 e 8 sem nenhum tipo de dificuldade, nessas questões, as associações envolviam chocolates, balas e palitos. Já na questão 2, todos os alunos erraram, nela a máquina triplicava um número dado e em seguida subtraía por 3 (Gráfico 1).

Gráfico 1: Acertos do jogo “Máquina Mágica”



Fonte: Dos autores, 2018

Todos os alunos relataram que os erros cometidos no jogo ocorreram por dificuldades com operações envolvendo números negativos, uma vez que, esses estavam envolvidos em todas as questões numéricas.

A atividade aplicada depois das mídias digitais também obteve resultados positivos, no entanto, os alunos mostraram dificuldade em argumentar e defender seus pontos de vista. A primeira questão possuía três itens, no item “a” a pergunta era conceitual e todos os alunos alcançaram os objetivos, no item “b” foi pedido para formularem uma sentença matemática que expresse o problema, os 4 participantes acertaram, já no item “c”, foi pedido uma simples aplicação da sentença matemática, mas havia várias maneiras de como chegar na resposta, todos os alunos optaram por usar a sentença matemática, nesse item apenas um aluno errou.

Na segunda questão, os alunos tinham que analisar uma imagem e encontrar um padrão entre cada par de números. No item “a”, os alunos teriam que escrever baseado no padrão que eles encontraram, qual seria o último número da imagem. No item “b”, os alunos deveriam explicitar a lei de associação que estava presente na relação daqueles números. Apenas 2 dos 4 alunos conseguiram explicitar a lei de associação e 3 dos 4 alunos conseguiram encontrar o padrão dos números e responder qual seria o último número da imagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluimos que a integração do vídeo com o jogo Máquina Mágica obteve resultados interessantes tanto em relação ao teste proposto, quanto ao despertar da curiosidade dos alunos, referente ao conceito de função, servindo como ferramenta para estimular a aprendizagem dos alunos de uma forma diferenciada. Segundo os alunos envolvidos, a aplicação do jogo e do vídeo como ferramenta para o ensino de funções propiciou uma aula mais dinâmica e interessante, pois o uso de tecnologias digitais está presente no cotidiano dos alunos e desperta o interesse deles.

Infelizmente o presente trabalho só foi aplicado com 4 alunos devido ao número reduzido de máquinas funcionando na escola. O Laboratório de Informática da escola possuía cerca de 20 máquinas, porém cerca de 10 máquinas não estavam funcionando e as demais estavam com a senha de acesso trocada, o que impossibilitou o uso no momento da aplicação. Devido a fatos como este, o professor pode se sentir desestimulado a trabalhar com uma turma no Laboratório de Informática, então uma possível saída para esse tipo de situação é o desenvolvimento e aplicação de jogos *mobile*, pois, a maioria dos alunos em sala de aula possuía um telefone celular com o sistema operacional *Android*, inclusive dois alunos perguntaram se o jogo Máquina Mágica estava disponível na *Play Store*, pois segundo eles isso facilitaria o acesso ao jogo.

No geral o resultado foi satisfatório, porém foi evidente a dificuldade encontrada pelos alunos nas associações que envolviam números inteiros, em particular, os números negativos.

AGRADECIMENTOS: Agradecemos à Pró-Reitoria de Graduação da Universidade Federal do Espírito Santo, pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA JUNIOR, E. R. B.; CARDOSO, V. C.; KATO, L. A. Operações aditivas com números inteiros a partir da interação com um jogo digital. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2017, Paraná. **Anais...** Cascavel: Unioeste, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília, 1999.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G.. **Informática e Educação Matemática.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

O USO DO JOGO BATALHA NAVAL COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DE PLANO CARTESIANO: UMA EXPERIÊNCIA NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Filipe Ribeiro Carneiro

*Instituto Federal do Espírito Santo – IFES
rc.filiperibeiro@gmail.com*

Rayane Salviano

rayanesalvianoos@gmail.com

Saulo dos Santos

*Universidade Federal do Espírito Santo – UFES
saulods49@gmail.com*

Resumo: Este trabalho objetiva relatar a experiência da utilização do jogo Batalha Naval em uma turma de Primeiro Ano de Ensino Médio, para a exposição do conteúdo de plano cartesiano e descrever os resultados obtidos na aula através do ensino de matemática com a aplicação de jogos matemáticos. Para alcançar tal objetivo, vamos expor o contexto escolar vivido pelos alunos com relação a disciplina de matemática, abordar a teoria implantada no jogo contextualizando com a relevância da prática de jogos matemáticos em sala de aula, detalhar como foi apresentado o jogo Batalha Naval para esta turma, exibindo a elaboração do material manipulável confeccionado, além de apresentar o mesmo como um todo, listando o regulamento e o modo de jogar atribuído a turma. Alguns dos principais resultados obtidos com a utilização do jogo Batalha Naval em sala de aula foi a localização de pontos no plano cartesiano, visto que os alunos confundiam os eixos das abcissas e ordenadas, além da pronúncia correta dos pares ordenados.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Jogos Matemáticos; Batalha Naval; Plano Cartesiano.

1. Introdução

A matemática no contexto escolar sempre foi vista, pelos alunos e pela sociedade de modo geral, como uma disciplina difícil, causando-lhes muitas das vezes medo e insegurança em relação aos conteúdos abordados em sala de aula, transformando o estudo da mesma em uma tarefa árdua e desestimulante. O cenário encontrado ao longo do estágio supervisionado realizado em uma Escola de Ensino Médio, localizada na Grande Vitória, não foi diferente. Boa parte dos alunos do 1º ano encontravam-se desmotivados, não prestavam atenção na aula, não sentiam-se interessados pelos conteúdos propostos ao longo das aulas de matemática.

Ao abordar o conteúdo sobre plano cartesiano, a professora regente observou que além de desmotivados, os alunos apresentaram muita dificuldade para compreender o conceito de plano cartesiano e todos os seus elementos. A fim de sanar essas dificuldades e ao mesmo tempo abordar de forma diferenciada tal conteúdo, a professora sugeriu que preparássemos uma atividade que abordasse e ao mesmo tempo revisasse o conteúdo de plano cartesiano, já trabalhado com a turma por ela própria em aulas anteriores, de modo a favorecer a compreensão e a melhor visualização do conceito, por parte dos alunos.

Em busca de uma alternativa que possibilitasse aos alunos o desenvolvimento de estratégias, de organização, de concentração, de atenção, do raciocínio, da motivação e da exploração do conceito matemático, surgem os jogos matemáticos como elemento facilitador, uma vez que permitem que os alunos pratiquem os conteúdos de forma interativa, além de proporcionar o desenvolvimento do raciocínio.

Portanto, com base na necessidade da turma e dos benefícios que os jogos em sala de aula podem trazer, em uma decisão conjunta, resolvemos confeccionar e desenvolver junto à turma o jogo “Batalha Naval” a partir do seu formato original, adaptando algumas regras e maneiras de como jogar, estabelecendo uma relação coerente entre o jogo em si e os conceitos matemáticos a serem abordados.

2. O uso de jogos nas aulas de Matemática

No que tange o Ensino de Matemática é notório o crescimento do uso Jogos Matemáticos em sala de aula como recurso didático (Almeida, 2010) para o aprendizado de algum conteúdo. O seu uso pode ser feito tanto como forma introdutória de algum conceito, quanto para a fixação do mesmo, desta forma, percebemos a sua versatilidade de uso em sala de aula. No nosso caso, estava sendo abordado com a turma a matéria de plano cartesiano e, vendo a dificuldade em compreender esse assunto, fez-se uso do recurso de jogos matemáticos como uma forma lúdica de melhorar a compreensão e domínio do assunto.

O seu uso em sala de aula requer zelo por parte do professor, porque assim como diz Almeida (2010), o jogo por si só não desenvolve a construção do conceito matemático, nem em sua totalidade e nem em sua essência. O que podemos afirmar que os Jogos Matemáticos auxiliam na parte operacional, fixação e como auxiliar didático para a compreensão de um conceito. Além disso, os jogos matemáticos desenvolve no aluno as capacidades de concentração, relação interpessoal, exploração de problemas, análise da situação, comparação, previsão, tomada de decisão, entre outros.

De acordo com Kishimoto (1996) por meio do jogo

As crianças ficam mais motivadas a usar a inteligência, pois querem jogar bem; sendo assim, esforçam-se para superar obstáculos, tanto cognitivos quanto emocionais. Estando mais motivadas durante o jogo, ficam também mais ativas mentalmente. (KISHIMOTO,1996,p.96)

Além disso, Borin (1996) defende que

Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos estudantes que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem. (BORIN, 1996)

Concordamos com Almeida (2010), ao utilizar jogos em sala de aula, deve-se ter objetivos claro e bem definidos para sempre evitar o “jogo pelo jogo” e para não recair em erros do passado, quando esse recurso foi incorporado no Ensino de Matemática sem objetivos claros.

No que diz respeito a matemática no contexto escolar Macedo et al (1997) afirma ainda que “o jogo de regras possibilita à criança construir relações quantitativas ou lógicas: aprender a raciocinar e demonstrar, questionar o como e o porquê dos erros e acertos.” (Macedo et al.,1997,p.151).

A busca por outros recursos de Ensino de Matemática se justifica pelo baixo interesse por parte dos alunos em aulas tradicionais “quadro e giz”, conversando com Cunha (2013), uma expressão muito comum por partes dos discentes é dizer que a “Matemática é chata” rotulando a matemática como uma disciplina difícil. E esse sentimento por parte dos alunos traz como consequência um baixo rendimento na disciplina.

O uso dos jogos matemáticos provoca uma quebra de paradigmas na sala de aula, em que o professor sai do centro da aula e passa a ter uma voz passiva. O professor passa a estimular os alunos a

cada jogada, questionando o porquê dessa ou daquela jogada, explorando o raciocínio do aluno fazendo com que eles criem e recriem conceitos matemáticos, provando um trabalho exploratório pautada nos conceitos que se deseja desenvolver. E o mais interesse disso tudo, de forma lúdica.

A proposta dos jogos matemática comunga com o Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) quando diz “o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um ‘fazer sem obrigação externa e imposta’, embora demande exigências, normas e controle.” (BRASIL, 1997, p.35) incentivando ainda mais o seu uso.

3. Metodologia

O jogo Batalha Naval foi desenvolvido junto com a turma de Primeiro Ano do Ensino Médio concomitante com o Técnico de Mecânica de uma escola do sistema estadual de Ensino Médio do estado do Espírito Santo. Participou do jogo todos os alunos presentes da turma, além da professora regente da turma. Os alunos possuem uma faixa etária entre 15 anos a 16 anos e são moradores de toda a grande Vitória. O jogo foi aplicado no mês de junho do ano corrente. A turma era heterogênea quanto a sua formação escolar, visto que parte da turma adivinha do Ensino Fundamental regular e outra parte de Supletivo devido ao atraso de sua formação.

A ideia da confecção do jogo foi de dar a aparência de um jogo comercial, contudo fazendo uso de materiais simples que, no geral, estão disponíveis pela escola para os professores. Esta opção se deu para deixar o jogo mais atrativo aos olhos dos alunos, tendo como uma das consequência uma aprendizagem lúdica. Um outra opção, pouca atrativa, seria fazer o jogo apenas em folhas sulfite contendo o plano cartesiano ou algo semelhante, dependendo como se deseja trabalhar, e as embarcações sendo desenhada pelos discentes.

Para o jogo foram preparados os tabuleiros contendo o plano cartesiano onde os alunos colocariam suas embarcações. Para a sua confecção foram usados material de papelaria, a saber: placa de isopor, cartolina na cor azul, folha azul claro e em folhas brancas, EVA colorido e tachas. As folhas foram para imprimir o plano cartesiano tanto nas folhas brancas quanto nas folhas azuis, onde cada aluno marcariam as jogadas já realizadas pelo grupo (folha branca) e para fixar as embarcações (folha azul). Posteriormente foram preparadas as peças que representam as embarcações. Para confecção dessas peças foi utilizado EVA, tachinhas e cola super bond para fixar a tachinhas no EVA.

No caso da turma em questão, a proposta era de dividir a turma em seis grupos, onde estes grupos foram divididos pela professora regente, de forma a equilibrar os alunos em relação ao rendimento nas avaliações, e com isto, o jogo se deu em três partidas simultâneas. Desta forma foram produzidos seis jogos completos, além de peças extras para o caso de possíveis perdas ou peças com defeito.

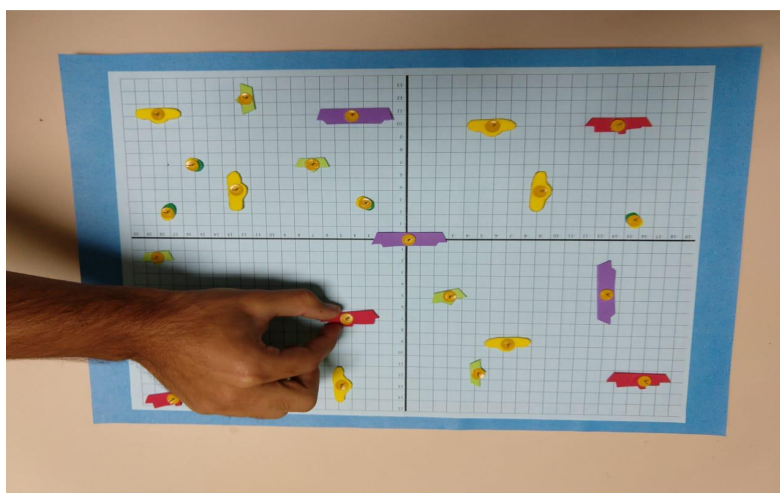


Figura 1 - Jogo com as peças dispostas no tabuleiro
Fonte: Acervo pessoal, 2018.

O jogo é composto pelos seguintes itens: Tabuleiro Azul contendo o plano cartesiano; Quatro (4) Barcos roxos; Cinco (5) Barcos vermelhos; Seis (6) Barcos amarelos; Cinco (5) Barcos verdes; Cinco (5) Barcos verdes e amarelos; Plano cartesiano Branco. Cada barco ocupa uma quantidade de pontos no plano cartesiano (veja na tabela abaixo) e, cada barco possui uma taxa no seu verso para se fixar no tabuleiro azul.

EMBARCAÇÕES	QUANTIDADE DE PONTOS OCUPADOS
Barco Roxo	5
Barco Vermelho	4
Barco Amarelo	3
Barco Verde	2
Barco Verde e Amarelo	1

Quadro 1 - Pontuação referente a cada embarcação
Fonte: Elaborado pelos próprios autores

As regras do jogo são baseadas no jogo tradicional de batalha naval, sendo as modificações feitas para melhor alcançar o ensino desejado. Sendo assim, cada partida tem duração, em média, de 20 minutos; Não é permitido que duas (2) embarcações se toquem ou se sobrepõem; As embarcações só podem ser colocadas de forma vertical e horizontal; Cada taxa deve necessariamente estar afixada em um ponto do plano cartesiano; O grupo não deve revelar ao oponente as localizações de suas embarcações.

Deve-se dividir em grupos, de tal forma que uma partida é um grupo contra o outro. O tabuleiro azul representa o oceano, e cada ponto do plano cartesiano representa uma coordenada geográfica onde a embarcação se localiza. O jogo consiste em adivinhar em quais pontos no plano cartesiano estão localizadas as embarcações do grupo oponente.

Cada grupo, em sua vez de jogar, precisa seguir os procedimentos: Anunciará 3 pontos do plano cartesiano, indicando as coordenadas do alvo que definem a posição. Para que o jogador tenha o controle dos pontos anunciados, deverá marcar cada um deles no reticulado intitulado "Seu jogo". (Plano cartesiano da cor Branca); Após cada um dos pontos localizados, o oponente avisará se acertou

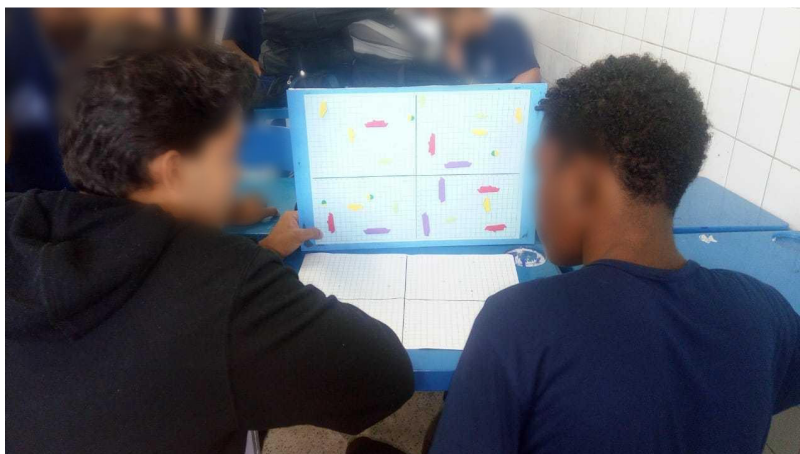
uma embarcação ou acertou a água. Em caso de acertar uma embarcação, dizer qual a embarcação foi atingida. Se ela for afundada (a embarcação afunda somente quando todos os pontos que estão sob a mesma são adivinhados pelo grupo adversário) esse fato também deverá ser informado; A cada ponto acertado em um alvo, o oponente deverá marcar em seu tabuleiro para que possa informar quando a embarcação for afundada; Após os 3 pontos localizados e dadas as respostas do oponente, será a vez do outro grupo.

Vence o jogo o grupo que afundar o máximo de embarcações adversárias dentro do intervalo de tempo delimitado.

4. Resultados e Discussões

Ao chegarmos na sala os grupos já estavam divididos, porém os alunos ainda estavam bastante agitados. Foi distribuído para cada equipe um tabuleiro azul, um plano cartesiano plano e as peças do jogo que representavam as embarcações. Em um primeiro momento foi retomada a ideia do plano cartesiano e suas coordenadas, explicado as regras do jogo, bem como o modo de jogar. Cada equipe iniciou o jogo colocando as embarcações no tabuleiro azul, de acordo com as regras explicadas. Nessa etapa do jogo, observamos que alguns grupos colocavam parte das embarcações fora do plano cartesiano, sendo necessário que explicássemos que para a total localização das embarcações era necessário que a mesma estivesse sobre pares ordenados.

Figura 2 - Alunos colocando as suas embarcações no plano cartesiano



Fonte: Acervo pessoal, 2018.

Em seguida, após os tabuleiros devidamente montados iniciaram-se as partidas. De modo a acompanharmos de perto as jogadas e auxiliarmos os alunos no decorrer da partida, cada um dos estagiários ficou acompanhando a disputa entre dois grupos, verificando se os conceitos utilizados para a marcação dos pontos estavam corretos e sanar dúvidas que iam surgindo a partir das jogadas.



Figura 3 - Alunos tirando dúvidas

Fonte: Acervo pessoal, 2018.

Os alunos ficaram muito empolgados com o jogo, todos participaram de maneira efetiva, todos queriam falar os pares ordenados e ao final disseram que o jogo contribuiu para a consolidação do conceito. A cada rodada e à medida que os grupos iam afundando embarcações dos adversários o jogo ficava ainda mais emocionante e os alunos vibravam a cada acerto.



Figura 4 - Alunos jogando

Fonte: Acervo pessoal, 2018.

Ao longo da partida observamos que alguns alunos na hora de falar os pares ordenados acabavam invertendo e trocando o x pelo y , ou ainda, apresentavam dificuldades na hora de localizar o ponto falado pelo adversário.

Um resultado imediato que pode ser observado, é a pronúncia dos alunos quanto a fala dos pares ordenados. Quando perguntado quais pontos o aluno queria marcar no tabuleiro adversário, muitos falavam da seguinte forma: “ quero marcar o ponto dois y três x”, ou seja, desejavam marcar o ponto (3,2). Um erro comum, consequente da troca de posicionamento dos eixos de abscissa e ordenada, já comentado anteriormente. Neste momento, pudemos corrigir de imediato a pronúncia dos alunos, fazendo com que falassem corretamente o ponto “ três, dois”.

Outro erro comumente executado pelos alunos é na disposição das embarcações no tabuleiro. Nas regras do jogo, citadas acima, devemos colocar as embarcações exatamente em cima do par ordenado do plano cartesiano. Entretanto, alguns alunos colocavam as embarcações em nenhum ponto, ou seja, marcavam em pontos com coordenadas não inteiras. Logo, estes erros cometidos pelos alunos foram corrigidos rapidamente, e com isso, houve um amadurecimento do conceito matemático,

preparando os alunos para assuntos futuros que requisitam o entendimento do conteúdo de plano cartesiano.

5. Conclusão

O uso adequado do recurso de jogos matemáticos tem um grande potencial de aprendizado, como descrito no relato. Os alunos puderam (re)criar os conceitos do plano cartesiano de uma forma lúdica e não tradicional. A proposta foi de uma aprendizagem exploratória centrada nos discentes com o professor sendo um motivador e incentivador.

Além disso, o jogo possibilitou que os pequenos erros observados, ao longo do jogo, fossem sanados e corrigidos no seu decorrer por nós estagiários presentes em cada grupo e até mesmo pelos próprios colegas dos alunos que faziam parte do mesmo grupo. Posteriormente, ao final da partida os erros que mais apareceram durante o jogo foram explicados para toda a turma.

Ao final percebemos que os objetivos principais foram alcançados, visto que a abordagem do jogo de tabuleiro não apenas foi motivadora, mas também contribuiu para que os conceitos fossem fixados e criassem significados para os alunos, propiciando um novo olhar para a matemática.

Referências

ALMEIDA, S. S.; BARBOSA, C. J. V. O jogo como um instrumento para o ensino de matemática apresentado pelos livros didáticos. In: **X Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)**, 10., 2010, Salvador. Anais...Ilhéus: Via Litterarum, 2010.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. São Paulo: IME-USP; 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática/ Secretaria da Educação Fundamental**. Brasília: Mec/SEF, 1997.

CUNHA, D. da S. A educação matemática e o desinteresse do aluno. **Revista Brasileira de Educação e Saúde**. 2013, p. 20-24.

KISHIMOTO, T. M. (org.). **Jogo, Brinquedo, Brincadeira e a Educação**. São Paulo: Cortez, 1996, p. 96.

MACEDO, L., PETTY, A. L. S., PASSOS, N. C. **4 Cores, Senha e Dominó**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997, p. 151.

CONSTRUÇÃO DE CASAS

Melissa Damacena da cruz

Universidade Federal do Espírito Santo

Melissadamacena1@gmail.com

Valdinei Cardoso

Universidade federal do Espírito Santo

V13dinei@gmail.com

RESUMO

O presente texto aborda a modelagem matemática como alternativa para despertar nos alunos o interesse pela disciplina, para incentivar a criatividade, associar matemática ao cotidiano e proporcionar um melhor aprendizado do conteúdo. A atividade realizada com os alunos do 7º ano da escola Santo Antônio, localizada no município de São Mateus -ES, teve por objetivo levar os alunos a entenderem na prática o conceito de proporcionalidade, escala, perímetro e área. Os dados foram coletados através do desenho da planta baixa de uma casa e por meio de atividades. Com os resultados, destaca-se o interesse do aluno pela modelagem, as dificuldades e os principais erros.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Proporção; Criatividade; Dificuldades.

INTRODUÇÃO

Os trabalhos retirados do EPEMEN 2014 foram bastante importantes para a realização da atividade “Construção de Casas”, pois ambas relacionam a matemática com o cotidiano e buscam levar o aluno a refletir sobre como resolver o problema em questão. Utilizam conceitos de escala, proporção, geometria plana e gráficos.

Em nosso levantamento de dados localizamos os trabalhos de Ramos e Almeida (2014), teve como objetivo investigar a viabilidade da instalação de um sistema de captação da água da

chuva em uma escola. O sistema é viável economicamente? As estudantes envolvidas tiveram o objetivo de facilitar os procedimentos para os cálculos da área do telhado. Ziegler, Quartieri e Rehfeldt (2014), por sua vez examinaram os resultados decorrentes da exploração de atividades envolvendo modelagem matemática (MM) e o tema esportes com os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola na cidade de Muçum/RS. Os alunos fizeram um questionário com perguntas relacionadas ao tema esporte, a partir dos dados obtidos por meio do gráfico em forma de fração. Eles também fizeram um trabalho com os esportes que mais gostam, foram exercícios como: analisar a roda de uma bicicleta, o seu diâmetro, o raio e a escala para construção de um túnel de acesso a um campo de futebol.

Dias, Moura Neto, Santos e Barros (2014) buscaram compreender e representar as formas geométricas e identificar elementos que caracterizem algum tipo de aprendizagem mediante o uso de materiais manipuláveis no ensino, além de promover discussões sobre as noções de proporção, de operações aritméticas e de formas geométricas planas e espaciais.

O desenvolvimento do trabalho “Construção de Casas” em sala de aula tem o fim de construir uma planta baixa de uma casa, o objetivo é levar os alunos a aplicarem seus conhecimentos de proporção. A atividade também possibilita a utilização de conceitos da geometria plana.

REFERENCIAL TEÓRICO

“Para os alunos, a matemática consiste num manipular de fórmulas que, após certo “treino”, torna-se fácil em situações próprias da matemática” (BARALDI, 1999, p. 88) Diante disso, temos a impressão de que, muitas vezes, aluno é levado a aprender a matemática com o fim de realizar um concurso ou vestibular e não consegue relacionar os conteúdos estudados com a realidade que o cerca, o que torna a matéria desinteressante. Uma das formas de se representar um modelo matemático e a utilização de equações, inequações ou gráficos.

Para (BUENO, 2011, p. 8):

Modelagem matemática, o ato de modelar –ou ato de criação do modelo –pode ser entendido como uma atividade de formular estratégias e argumentos a respeito de uma situação e formalizá-los sob a forma de

um sistema matemático que permita uma interpretação ou compreensão a respeito da situação.

Conforme Biembengut, para fazer modelagem em sala de aula é preferencial que se trabalhe em grupo, o professor pode usar outros modelos e adaptá-los ou pode ser criados modelos inéditos. O estudo e interpretação de um tema segue em três etapas básicas: “interação” (reconhecimento da situação-problema e familiarização com o assunto a ser modelado); “matematização” (formulação do problema e resolução do problema em termos do problema) e “modelo matemático” (interpretação da solução e validação do modelo) (BUENO, 2011).

Biembengut (2010, p. 11) lista algumas situações envolvendo matemática elementar “O juro cobrado por uma instituição financeira a um determinado empréstimo; a área de um terreno retangular”. Para Biembengut (2010, p. 18):

A modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar matematicamente. Isso porque é dada a o aluno a oportunidade de estudar situações problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico.

Tomando o modelo como uma forma de representação do real, algo pequeno utilizado para chegar a conclusões maiores, como fórmulas, maquete, pessoas. A Modelagem Matemática é a criação do modelo. É importante para a aprendizagem pois estimula a criatividade do aluno e faz com que ele aplique conhecimentos aprendidos ao longo do percurso escolar. A atividade “Construção de casas” avalia a capacidade dos alunos em associar conceitos de proporção com escala.

METODOLOGIA

A escolha em trabalhar com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental deve-se ao fato dos alunos já terem visto conceitos de fração, proporcionalidade, operações elementares, conceitos de geometria plana (perímetro de figuras planas, área de figuras planas). A ideia é despertar nos estudantes o maior interesse pela aprendizagem, promover o raciocínio, fazer com que eles

associem o conhecimento teórico da matemática com a atividade “prática” e comparar os fenômenos do cotidiano com a matemática.

A tarefa que apresentaremos a seguir é uma adaptação de Biembengut (2010). A ideia é construir uma planta baixa de uma casa. Durante a construção, usaremos os conceitos de escala, de proporção e de área e perímetro.

Título: construção de casas; tempo: duas aulas; material utilizado: folha de papel A4 e régua; objetivos: construção de uma planta baixa de uma casa; conteúdos a serem trabalhados: escala, proporção, operações elementares e geometria plana (área, perímetro).

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Usaremos uma escala de 2/100 (cada metro do tamanho real equivale a 2 cm do desenho. A planta deverá ter um terreno, a casa terá dois quartos, um banheiro, uma sala, dois corredores e uma cozinha (FIGURA 1). Os tamanhos reais da casa serão:

Figura 1 – Planta baixa de uma casa



Fonte: (BIEMBENGUT, 2010, p. 55)

Terreno: 9m*12m; quartos:3m*4m; banheiro:3*1,5m; sala:3m*7m; cozinha:3m*3m e corredor:1,5m*3m

ETAPAS DA ATIVIDADE

1ª etapa: Os alunos deverão fazer o desenho seguindo a escala. 2ª etapa: deverão realizar as atividades: qual o perímetro total da casa?; qual a área total da casa?; se as dimensões de uma cerâmica são 20cmx10cm, qual a quantidade de cerâmicas que seriam necessárias para revestir todo o piso da casa?.

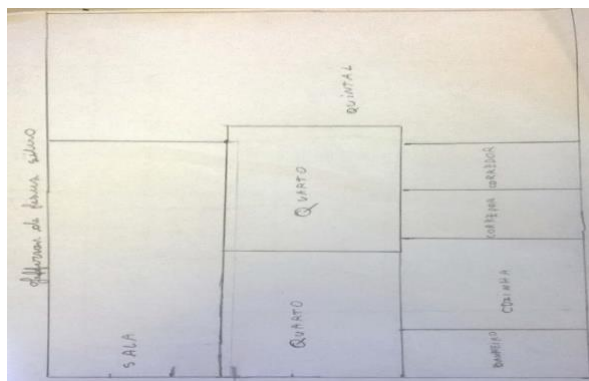
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A atividade “construção de casas” foi realizada na escola Santo Antônio, no município São Mateus, no Espírito Santo com os alunos do 7º ano. Foram usadas duas aulas de 50 minutos. No início foi explicado para eles o conceito de escala e de como fazer o cálculo. Foi usada a seguinte explicação: a escala é aplicada em mapas, maquetes, em reduções e ampliações de imagens, para representar as proporções. É a medida do desenho relacionada com o tamanho real. $E=d/D$ (razão entre a medida do desenho e a medida do tamanho real). Foi dado o exemplo do mapa: em um mapa a distância entre o ponto A e B é de 3 cm, esse mapa tem uma escala de 1/500000, isso significa que cada cm do desenho equivale a 500000 cm do tamanho real. Foi apresentado a seguinte questão: se você deseja ir do ponto A para o ponto B, quantos cm precisará se deslocar? Assim eles puderam revisar regra de três com a resolução da atividade. Logo após, começamos uma discussão sobre cálculo de área e perímetro, os alunos foram questionados sobre a diferença para que pudessem lembrar e então foi apresentado o conceito a eles. Em seguida realizou-se um exercício no quadro sobre escala, pois ainda estavam com dificuldade de compreender o assunto.

A primeira atividade consistia em fazer uma planta baixa de uma casa na escala 2/100 (como descrito anteriormente). Nesse instante eles não tinham noção de como começar, até que sugeriu-se a eles que usassem regra de três. Mesmo assim alguns estavam com dificuldade em multiplicação. Alguns discentes não queriam fazer a atividade no primeiro momento, mas com algumas orientações fizeram. Estavam com dificuldade em multiplicação (quando tentavam fazer regra de três), outros fizeram, mas não sabiam transformar 1,5 metros em centímetros. Também tinham dúvida em como “montar” a planta, ou seja, como encaixar os cômodos no

terreno para não sobrar nenhum espaço. Teve apenas um aluno que desenhou uma varanda na área que sobrou. Eles relataram ter gostado bastante da atividade. O erro mais comum foi não fazer todos os cômodos com as dimensões corretas, ora maior ora menor. Muitos deixaram incompleto, mas apenas um errou todo o desenho.

Figura 2- planta baixa de uma casa, feito pelo aluno Jefferson



A segunda atividade teve três questões, primeiro para calcular o perímetro total da casa, depois a área total e a letra C pedia para calcular quantas cerâmicas seriam necessárias para revestir toda a casa. Demonstraram desinteresse em fazer. Tiveram impasse em entender a diferença entre área e perímetro. Alguns calcularam a área do terreno e não da casa. Outros acharam que para calcular perímetro deveria somar as dimensões. Apenas uma pessoa (das sete que fizeram) acertou uma questão corretamente. Somente uma tentou resolver a letra C, no entanto calculou a área da cerâmica e não terminou. No momento da atividade uma pessoa achou o valor de 200 cm² a área total e 210 a área a cerâmica, assim percebeu e questionou sobre o erro.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho consistia em tentar fazer com que os alunos integrassem o conteúdo visto em sala de aula com a atividade prática e promover a criatividade, mas com uma atividade descontraída, que foi o exercício de desenhar a planta baixa de uma casa. Para Biembengut “a modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a modelar matematicamente, o aluno também desenvolve o seu senso crítico” (BIEMBENGUT, 2010, p. 18).

Os alunos já tinham estudado proporcionalidade, assim a primeira impressão é que eles não teriam dificuldades em entender e resolver a questão da escala, todavia eles entenderam na medida em que fizeram o desenho. Foi percebível que eles estavam vendo pela primeira vez geometria plana naquele momento, por isso tiveram dúvida e fizeram confusão para diferenciar área de perímetro mas, com exercícios aprenderam. Todos fizeram ou tentaram fazer a planta baixa da casa, o que prova a parte incentivadora da Modelagem matemática. Conforme Biembengut “ espera-se por meio da modelagem: que os alunos se interessem pela pesquisa, que eles possam desenvolver habilidades para formular e resolver problemas, que apliquem o conteúdo matemático e desenvolvam a criatividade” (BIEMBENGUT, 2010, p. 23).

Apesar de a atividade ter sido feita individualmente, durante a modelagem foi observado que os alunos trocaram informações entre eles. Para autores como Biembengut, Burak, Barbosa e Bean é preferencial que se trabalhe em grupo (BUENO, 2011). Assim para trabalhos futuros buscaremos um exercício coletivo.

REFERÊNCIAS

BIEMBENGUT, Maria Sallet. **Modelagem matemática no ensino**. Hein.5.ed., 1ª edição. São Paulo: Contexto, 2010.

ZIEGLER, J.R; QUARTIERI, M.T; REHFELDT, M.J. O esporte como tema de desenvolvimento de atividades envolvendo modelagem matemática com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. In: anais VI **Encontro Paranaense de modelagem em educação matemática**. Paraná: 2014. Disponível em: < http://sbemparana.com.br/site/?page_id=18>. Acesso em: 19 jun. 2018.

RAMOS, D.C; ALMEIDA, L.D.W. Competência de modelagem na atividade captando água da chuva na escola .In : anais VI **encontro Paranaense de modelagem em educação matemática** . Paraná: 2014. Disponível em: < http://sbemparana.com.br/site/?page_id=18>. Acesso em: 19 jun. 2018.

DIAS, J.N.P; MOURA NETA, C.F; BARROS, O.S. Modelos matemáticos de aprendizagem com embalagens nas escolas ribeirinha de Belém do Pará. In: anais VI **encontro Paranaense de modelagem em educação matemática** . Paraná: 2014. Disponível em: < http://sbemparana.com.br/site/?page_id=18>. Acesso em: 19 jun. 2018.

Análise de um modelo matemático da imunoterapia com células CAR T

Brendon de Jesus Rodrigues

*PPG - Laboratório Nacional de Computação Científica
bjesus@lncc.br*

Luciana Carvalho

lucianalpt@gmail.com

Regina C. Almeida

*Laboratório Nacional de Computação Científica
rcca@lncc.br*

Resumo: Neste trabalho analisamos um modelo desenvolvido para descrever a resposta de um linfoma de Hodgkin à imunoterapia com células CAR T em camundongos imunodeficientes. A modelagem é baseada em equações diferenciais ordinárias e inclui interações entre três diferentes tipos de células: tumorais, efetoras (CAR T), e de memória. Através de simulações e de um método simples de análise de sensibilidade identificamos três possíveis resultados da imunoterapia, caracterizando as três fases da imunoedição do câncer. A análise de sensibilidade permitiu identificar os parâmetros do modelo que mais interferem na eliminação, equilíbrio e escape (fuga) do tumor. A análise matemática dos pontos de equilíbrio do modelo confirmam os resultados observados nas simulações.

Palavras-chave: Imunoterapia, Análise de Sensibilidade, Imunoedição

Introdução

O câncer é uma das principais causas de morte no mundo, sendo a segunda em países desenvolvidos. Nos últimos anos, grandes avanços têm sido observados no controle e eliminação de cânceres utilizando terapias celulares adotivas, principalmente em tumores associados ao sistema hematopoiético (MAUDE et al., 2015), como leucemias e linfomas. Uma das técnicas de terapia adotiva (ou passiva) para combater um câncer consiste em retirar linfócitos T do próprio sistema imune do paciente, modificá-los geneticamente para reconhecer e destruir de modo mais efetivo o tumor, expandi-los em cultura até eventualmente serem reinjetados no paciente. Os linfócitos T, um dos principais componentes do sistema imunológico adaptativo, que são modificados e expandidos são denominados células CAR T (*chimeric antigen receptor T cells*), e estão aptos para reconhecer os antígenos que estão expressos nas membranas das células cancerosas. Esta é uma terapia paciente-específico e ainda de alto custo financeiro. Além disso, todo o procedimento é ainda bastante desafiador pois normalmente o paciente está debilitado por inúmeras razões, tendo contagem de leucócitos baixa. Para alcançar sucesso, a imunoterapia deve ter um número suficientemente grande de células CAR T para eliminar o tumor, mas esta quantidade não deve ser grande demais de modo a causar reações adversas, com a denominada tempestade de citocinas. Neste contexto, a modelagem matemática pode atuar como ferramenta para auxiliar tanto no entendimento de algumas questões biológicas não plenamente compreendidas quanto na avaliação de diferentes cenários terapêuticos (KONSTORUM et al., 2017).

Neste trabalho realizamos um estudo mais detalhado do modelo desenvolvido em (RODRIGUES; CARVALHO; ALMEIDA, outubro, 2018) para descrever a resposta tumoral após a imunoterapia com células CAR T, incluindo a formação e ação da memória imunológica em camundongos imunodeficientes, como apresentada em (RUELLA et al., 2017). O modelo desenvolvido, que representa a dinâmica de células efetoras, de memória e cancerosas, foi capaz de representar a eliminação do tumor e a criação da

memória imunológica, conferindo proteção contra futura recidiva do tumor. O estudo realizado aqui consiste em analisar cenários de interesse não avaliados em (RODRIGUES; CARVALHO; ALMEIDA, outubro, 2018), incluindo processos de imunoedição. A identificação de cenários de eliminação, equilíbrio e escape do tumor foram comprovadas através da análise do equilíbrio dinâmico do sistema de equações diferenciais que descreve o modelo. Além disso, através de técnicas de análise de sensibilidade, identificamos os componentes do modelo que mais influenciam na resposta do tumor à imunoterapia.

Modelagem Matemática

Neste trabalho consideramos os modelo desenvolvido em (RODRIGUES; CARVALHO; ALMEIDA, outubro, 2018) para representar a dinâmica associada a tumores submetidos à imunoterapia com células CAR T. Tal dinâmica considera a interação de três populações de células: linfócitos CAR T (efetoras) (C_T), linfócitos T de memória (C_M) e células tumorais (T). O modelo consiste no seguinte sistema de 3 equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{dC_T}{dt} = \Lambda + \phi C_T - \rho C_T - \mu_T C_T + \theta T C_M - \alpha T C_T ; \quad (1)$$

$$\frac{dC_M}{dt} = \varepsilon \rho C_T - \theta T C_M - \mu_M C_M ; \quad (2)$$

$$\frac{dT}{dt} = rT(1 - bT) - \gamma T C_T . \quad (3)$$

A Equação (1) modela a dinâmica das células efetoras CAR T C_T . Consideramos um termo de fonte Λ que será utilizado para realizar a imunoterapia, ou seja, a dose de células CAR T que é inserida no paciente por unidade de tempo. Com taxas constantes ϕ e μ_T as células C_T se proliferam e morrem por apoptose. Consideramos que a diferenciação de células CAR T em memória é direta e linear. Essa conversão ocorre por meio do termo ρC_T , isto é, as células CAR T deixam seu estado efector para formar a memória imunológica. A partir do momento que uma célula de memória entra em contato com uma tumoral, ela é ativada e retorna para o estado efector (CAR T) a uma taxa θ . Por fim, o termo $\alpha T C_T$ modela o mecanismo no qual o tumor cria um ambiente imunossupressivo para resistir à eliminação pelo sistema imune. Esse termo pode, por exemplo, modelar a interação do receptor PD-1 com PD-L1, importante mecanismo utilizado por células cancerosas para evadir da eliminação pelo sistema imune. A memória imunológica, representada por C_M , retrata uma importante dinâmica do sistema imune adaptativo principalmente por fornecer proteção caso ocorra recidiva do tumor. Na equação (2) consideramos que a memória é criada de forma direta a partir da diferenciação das células CAR T. Essa diferenciação é modelada pelo termo $\varepsilon \rho C_T$, que assume que a célula que deixou o estado ativado (CAR T) se transforma em memória à uma certa proporção ε . Por outro lado, como mencionado anteriormente, quando em contato com células cancerosas, a memória retorna imediatamente ao fenótipo de efectora à uma taxa θ . As células de memória possuem longevidade, de modo que assumimos que têm uma taxa de mortalidade μ_M muito menor do que a das células CAR T. Finalmente, a equação (3) modela a dinâmica das células tumorais. Assumimos que, na ausência de sistema imune, as células cancerosas apresentam um crescimento logístico a uma taxa r e limitada em b^{-1} células devido a falta de recursos disponíveis no microambiente tumoral. A imunoterapia age inibindo o crescimento através de ação por contato direto entre as células CAR T e tumor, causando mortalidade dependente da concentração das células efetoras à uma taxa γ .

Análise Qualitativa

De forma geral, o sistema imune interage com a célula tumoral desde sua formação e desenvolve naturalmente uma resposta imune-tumoral, denominada imunovigilância. Essa resposta não necessariamente vai ser capaz de eliminar o tumor, mas pode ser capaz de retardar ou desacelerar o crescimento

de um câncer. Este processo inclui o conceito de imunoeedição, com três fases conhecidas com “*os três Es da imunoeedição*”: eliminação, equilíbrio e evasão (fuga) (DUNN; OLD; SCHREIBER, 2004). O processo de eliminação do tumor, que corresponde ao conceito original da imunovigilância, é aquele no qual o sistema imune possui mecanismos capazes de detectar e eliminar um invasor. Caso o sistema não seja capaz de eliminar completamente o tumor, a interação imune-tumoral entra no estado de equilíbrio. Neste caso, apesar do sistema imune eliminar diversas células cancerosas, algumas conseguem evitar essa eliminação através de mutações ou mecanismos como a ligação PD-1–PD-L1. O balanço de morte e proliferação pode fazer com que um câncer fique em um estado de “dormência” que pode durar muitos anos. Mutações e proliferação acelerada podem ainda tornar o tumor capaz de evadir do estado de equilíbrio e entrar em um estado denominado escape/fuga.

Par.	Significado	Valor	Unidade
ϕ	taxa de proliferação dos linfócitos C_T	0,265	dia^{-1}
ρ	taxa de conversão dos linfócitos C_T em C_M	$5,0 \times 10^{-2}$	dia^{-1}
μ_T	taxa de mortalidade dos linfócitos C_T	$3,0 \times 10^{-1}$	dia^{-1}
θ	coeficiente de conversão de C_M em C_T devido à interação com T	$6,0 \times 10^{-6}$	$(cel \cdot dia)^{-1}$
α	coeficiente de inibição de C_T devido à interação com T	$4,5 \times 10^{-8}$	$(cel \cdot dia)^{-1}$
ε	resposta numérica da conversão de C_T em C_M	3,0	-
μ_M	taxa de mortalidade dos linfócitos C_M	$5,0 \times 10^{-3}$	dia^{-1}
r^*	taxa de crescimento das células cancerosas T	$5,650026 \times 10^{-2}$	dia^{-1}
b^*	inverso da capacidade suporte das células cancerosas	$1,404029 \times 10^{-12}$	cel^{-1}
γ^*	coeficiente de mortalidade induzida por células C_T	$3,715843 \times 10^{-6}$	$(cel \cdot dia)^{-1}$

Tabela 1: Valores dos parâmetros definidos no modelo proposto. Os parâmetros indicados com o sobrescrito * foram calibrados em (RODRIGUES; CARVALHO; ALMEIDA, outubro, 2018) enquanto que os demais foram estimados.

Como mencionado anteriormente, o modelo proposto em (RODRIGUES; CARVALHO; ALMEIDA, outubro, 2018) foi capaz de representar experimentos em camundongos imunodeficientes que foram submetidos a imunoterapia contra linfoma de Hodgkin (RUELLA et al., 2017). Naquele estudo, utilizamos os parâmetros apresentados na Tabela 1. Aqui, avaliamos outros cenários para os quais alteramos a intensidade e o protocolo da imunoterapia, considerando também que os parâmetros do modelo estão sujeitos à incertezas. Em todos os casos tratados, consideramos condições de imunodeficiência de modo que adotamos condições iniciais homogêneas para C_T e C_M . Como em (RUELLA et al., 2017), permitimos que um tumor, inicialmente com $T = 2 \times 10^6$ cel, cresça até que a imunoterapia ocorra em $t = 42$ dias. Na terapia padrão, como o autor sugere, todas as células CAR T são colocadas neste tempo. A dinâmica do sistema é acompanhada até o instante $t = 250$ dias. Na Figura 1 apresentamos três diferentes cenários. No primeiro, ilustrado na Figura 1(a), observamos que o tumor atinge cerca de $2,2 \times 10^7$ cel no momento da imunoterapia com $\Lambda = 2 \times 10^6$ cel/dia. Como consequência, o tumor é rapidamente eliminado em poucas horas. Ao longo do tempo, observamos a conversão das células CAR T em células de memória, processo que prossegue até $t \approx 100$ dias, tempo a partir do qual as células efetoras desaparecem. Ao reduzirmos a quantidade de células na imunoterapia, diversas simulações mostraram que existe um limite abaixo do qual a eliminação do tumor não ocorre. Este cenário está ilustrado na Figura 1(b), obtida com $\Lambda = 2,534585 \times 10^5$ cel/dia. Após $t \approx 100$ dias, ocorre um equilíbrio do tumor e de células efetoras, com uma quantidade bem pequena de células de memória. Finalmente, na Figura 1(c) repetimos a imunoterapia com $\Lambda = 2 \times 10^6$ cel/dia fracionando-a em 5 injeções de 4×10^5 cel/dia a cada 7 dias. O tumor também é eliminado, como no cenário ilustrado na Figura 1(a), mas um pouco mais lentamente.

Para identificar as dinâmicas de longo prazo, repetimos o experimento anterior com a imunoterapia realizada em $t = 42$ dias com diferentes intensidades e acompanhando a evolução até $t = 500$ dias. Na Figura 2(a) ilustramos o caso com $\Lambda = 2 \times 10^6$ cel/dia (como na Figura 1(a)). Confirmamos que não

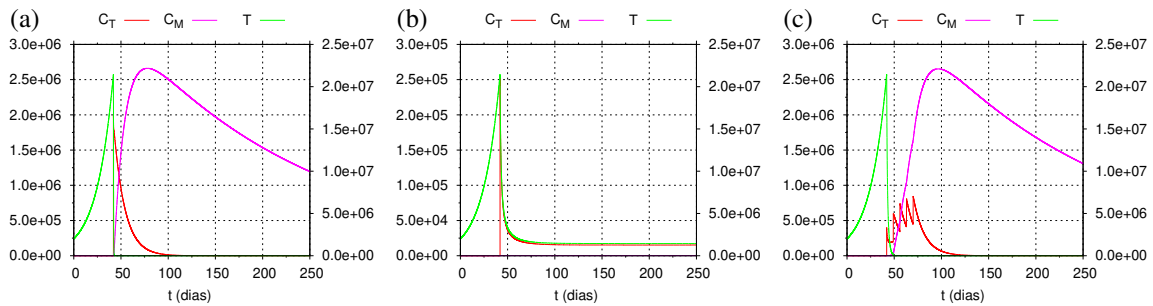


Figura 1: Três simulações do modelo (1)-(3) com $T(0) = 2 \times 10^6$ cel e iniciando a imunoterapia em $t = 42$ dias. Escalas à esquerda referem-se à C_T e C_M e à direita à T . (a) Para $\Lambda = 2 \times 10^6$ cel/dia, ocorre eliminação bastante rápida do tumor e formação da memória imunológica. (b) Para $\Lambda = 2,534585 \times 10^5$ cel/dia, ocorre redução do tumor mas não sua eliminação, com um nível baixo de células de memória. (c) Com a imunoterapia fracionada em 5 injeções de $\Lambda = 4 \times 10^5$ cel/dia a cada 7 dias, o tumor é eliminado um pouco mais lentamente em relação à injeção em uma única dose (caso (a)).

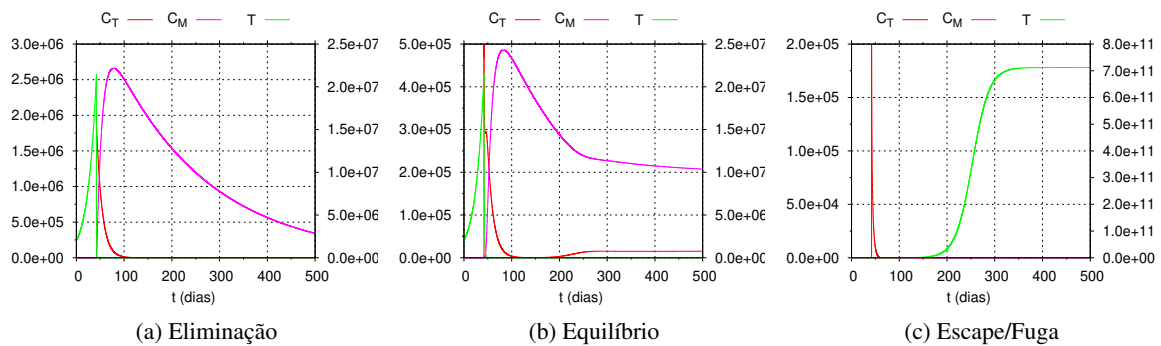


Figura 2: Simulações do modelo (1)-(3) que resultam em três cenários de resposta à imunoterapia com células CAR T para $T(0) = 2 \times 10^6$ cel. Escalas à esquerda referem-se à C_T e C_M e à direita à T . (a) Retrata o cenário de eliminação do tumor mostrado anteriormente, que ocorre quando $\Lambda = 2 \times 10^6$ cel/dia. (b) Considerando $\Lambda = 5 \times 10^5$ cel/dia ocorre equilíbrio das três populações. (c) O tumor consegue escapar quando utilizamos a imunoterapia com $\Lambda = 2 \times 10^5$ cel/dia.

há recidiva do tumor e observamos que as células CAR T são rapidamente convertidas em células de memória, as quais, após atingirem um valor máximo, decaem decorrente da morte natural definida pela taxa de mortalidade μ_M . A Figura 2(b) ilustra a dinâmica obtida com $\Lambda = 5 \times 10^5$ cel/dia. Neste cenário, o tumor não é completamente eliminado, e o sistema atinge um estado de equilíbrio em que o tumor é reduzido para $T \approx 1 \times 10^3$ cel. A Figura 2(c) ilustra o cenário com $\Lambda = 2 \times 10^5$ cel/dia, para o qual o tumor consegue evadir da ação da imunoterapia. O tumor é inicialmente reduzido pela ação da terapia (não visualizado por causa da escala), mas retoma o crescimento e atinge a capacidade suporte em pouco mais de 300 dias.

Análise de Sensibilidade

Estudos recentes têm discutido o papel do microambiente tumoral na resposta à terapias, incluindo a imunoterapia (BINNEWIES et al., 2018). O conhecimento sobre como os diversos constituintes e condições do microambiente tumoral cooperam para a resposta ou a falta de resposta à terapias é ainda bastante limitado, sendo esta caracterização a nível de cada paciente-específico mais desafiadora. Em termos de modelagem, incertezas que estão presentes em todas as etapas dificultam a predição desejada. Caracterizá-las e quantificá-las constituem etapas fundamentais para avaliar a confiabilidade de modelos. Sem isto os modelos computacionais são de pouca aplicabilidade na clínica médica.

A caracterização das incertezas em um processo de modelagem nem sempre é uma tarefa fácil. No contexto do modelo desenvolvido, por exemplo, a caracterização das incertezas presentes nos parâmetros

r , b e γ foi feita em (RODRIGUES; CARVALHO; ALMEIDA, outubro, 2018) via inferência Bayesiana, sendo os demais parâmetros estimados de modo a representar a dinâmica observada em (RUELLA et al., 2017). Os parâmetros associados ao crescimento do tumor (r e b) foram calibrados com dados *in vivo*, obtidos através de exame de imagem de bioluminescência em camundongos imunodeficientes (RUELLA et al., 2017). Por outro lado, o parâmetro γ , que representa a citotoxicidade das células CAR T, foi calibrado utilizando os dados de uma co-cultura de células cancerosas e de células efetoras em diferentes proporções. Apesar de sua utilidade prática, o cenário *in vitro* é uma simplificação do cenário *in vivo*, de modo que a ação efetiva em cada camundongo pode ser diferente. Neste contexto, identificar se variações nos valores de γ e nos demais parâmetros resultam em variações significativas na resposta à imunoterapia é uma informação importante para a confiabilidade da predição fornecida pelo modelo. Especificamente, a pergunta típica que desejamos responder é: o tumor será eliminado (a terapia terá sucesso) caso os valores dos parâmetros do modelo sejam “ligeiramente” diferentes? Técnicas de análise de sensibilidade contribuem para elucidar questões deste tipo. No presente estudo, apresentamos como um método simples, denominado *Scatterplots* (SALTELLI et al., 2008), para avaliar o impacto de variações nos parâmetros do modelo sobre a resposta do tumor à imunoterapia com células CAR T. Para fazer esta análise tendo em vista que não há caracterização das incertezas presentes em todos os parâmetros, vamos assumir que cada parâmetro é uma variável aleatória contínua com distribuição uniforme no intervalo limitado por $\pm 20\%$ do valor de referência indicado na Tabela 1. Nosso objetivo é identificar os parâmetros cujas variações mais influenciam a alteração da população de linfócitos T de memória (C_M), que caracteriza a reserva imunológica. A análise de sensibilidade pela técnica *Scatterplots* é baseada na amostragem de conjuntos de parâmetros via o método de Monte Carlo. A partir da resolução do modelo para cada conjunto, são gerados gráficos dos valores de cada parâmetro pelos valores de C_M no tempo 2000 dias, o qual é suficientemente grande para que as dinâmicas de eliminação, equilíbrio e fuga do tumor estejam bem estabelecidas. Os gráficos assim gerados, denominados *scatterplots*, consistem em nuvens de pontos que indicam os valores de C_M dentro das faixas de variação de cada parâmetro. Quanto mais definida for a forma da nuvem de pontos, maior a correlação entre o parâmetro e C_M .

Pelo fato de estarmos modelando a imunoterapia em camundongos imunodeficientes, assumimos que as células do sistema imune (linfócitos T) não crescem na ausência tumor. Esta hipótese estabelece uma restrição entre as taxas de proliferação e morte de C_T e de conversão de C_T em C_M , tal que consideramos apenas os conjuntos de parâmetros que satisfazem $\phi < \rho + \mu_T$. No experimento realizado geramos aleatoriamente, a partir das distribuições definidas anteriormente, 10343 dados, dos quais 10000 fazem sentido biológico, isto é, satisfazem à restrição mencionada. Dentre estes 10000 casos, observamos a ocorrência dos três diferentes cenários de resposta à imunoterapia mencionados na seção anterior. Em apenas 5% dos casos o tumor foi eliminado. Especificamente, a eliminação do tumor (quando $T < 10^{-10}$) ocorre em 507 casos. Em mais de 75% dos casos, precisamente 7640 casos, ocorreu fuga do tumor (quando $C_T < 10^{-10}$ e $C_M < 10^{-10}$), enquanto que um estado de equilíbrio foi observado em 1853 casos. Estes resultados indicam grande sensibilidade da resposta à imunoterapia com relação os parâmetros do modelo. Mais desfavorável é o fato de que na grande maioria dos casos a terapia não alcançou sucesso.

A Figura 3 apresenta os *scatterplots* referentes ao cenário de eliminação do tumor (507 casos). A análise do padrão das nuvens de pontos identifica a taxa de mortalidade das células de memória μ_M como o parâmetro que mais influencia a população das células de memória. A taxa de crescimento e mortalidade das células CAR T impactam diretamente e inversamente, respectivamente, a reserva imunológica. Mais precisamente, quando a taxa de crescimento das células CAR T (ϕ) aumenta, ocorre o aumento da população de C_T o que conduz à uma maior conversão para as células de memória. A situação inversa ocorre com o aumento da taxa de mortalidade das células CAR T. Destaca-se também a capacidade do tumor de escapar da ação do sistema imune, representado pelo parâmetro α . À medida que seu valor aumenta, a ação das células efetoras diminui, reduzindo a reserva imunológica.

Na Figura 4 são apresentados os mapas de calor referentes à frequência de ocorrência dos cenários de eliminação, equilíbrio e escape com relação ao valor de cada parâmetro. Para facilitar a comparação, a faixa de variação de cada parâmetro foi normalizada na escala $[0, 1]$, sendo este intervalo dividido em 10

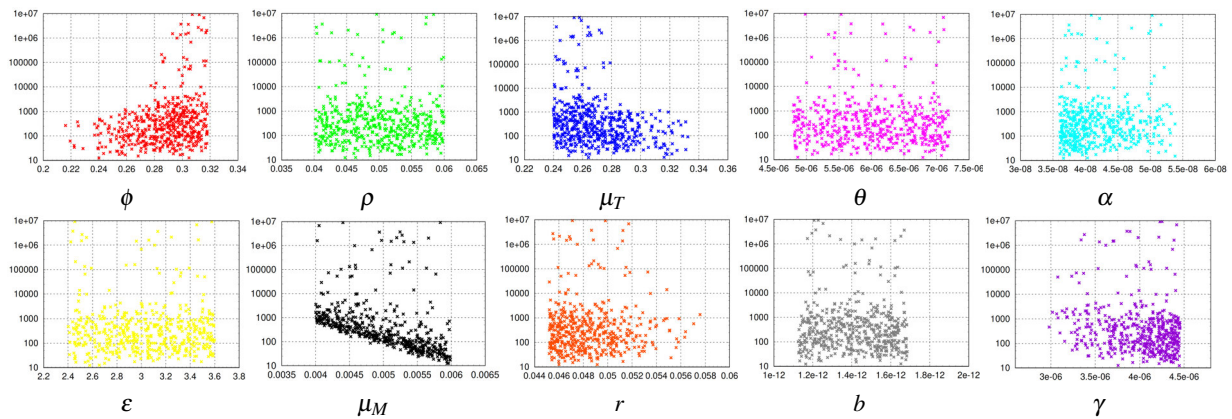


Figura 3: *Scatterplots* referentes ao cenário de eliminação do tumor. No eixo vertical são indicadas as populações de células de memória e nos eixos horizontais as faixas de variações de cada parâmetro.

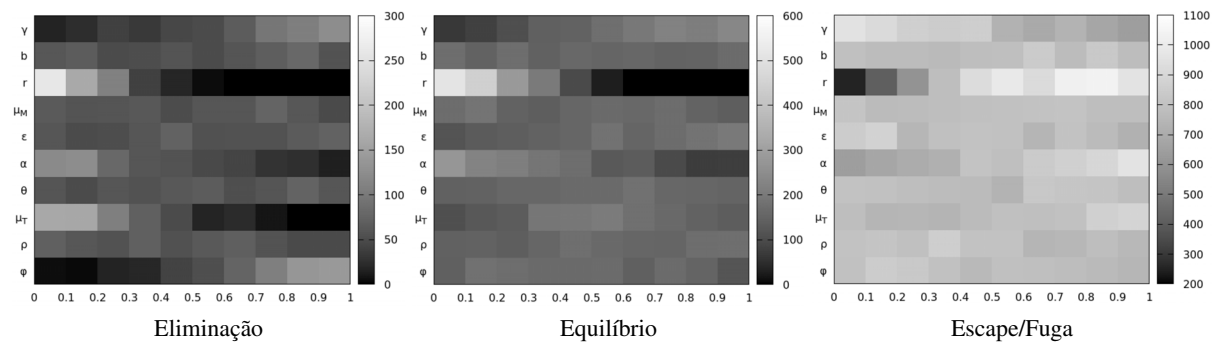


Figura 4: Mapas de calor que representam a frequência de ocorrência dos cenários de eliminação (esquerda), equilíbrio (centro) e escape (direita). As linhas estão associadas aos parâmetros do modelo, cujas faixas de variação foram normalizadas para o intervalo $[0, 1]$.

partes igualmente espaçadas. Para cada uma delas é identificada a frequência de ocorrência do cenário correspondente, com a cor preta indicando menor frequência, e a cor branca a maior frequência. Nos casos em que há eliminação do tumor, podemos observar que a frequência é bastante heterogênea com relação à variação dos parâmetros, sendo menor para tumores mais agressivos (r alto), com maior taxa de mortalidade de células efetoras (μ_T alto) e maior capacidade de evadir da ação do sistema imune (α alto). Os cenários de equilíbrio e escape apresentam frequências mais homogêneas que o de eliminação. A frequência do cenário de equilíbrio diminui bastante para tumores mais agressivos, situação para a qual a frequência do cenário de fuga aumenta. Isto também ocorre quando há maior inibição das células efetoras pelo tumor, um importante *hallmark* do câncer (HANAHAN; WEINBERG, 2011).

Análise do Equilíbrio Dinâmico

O modelo desenvolvido foi analisado usando o *software* (XPPAUT, January 2016), permitindo identificar os seguintes pontos de equilíbrio:

- 1) $C_T = 0 \text{ cel}$, $C_M = 0 \text{ cel}$ e $T = 7,12236 \times 10^{11} \text{ cel}$;
- 2) $C_T = 1,52052 \times 10^4 \text{ cel}$, $C_M = 1,97519 \times 10^5 \text{ cel}$ e $T = 1,0912 \times 10^3 \text{ cel}$;
- 3) $C_T = C_M = T = 0 \text{ cel}$;

Os dois primeiros pontos são classificados com estáveis, enquanto que o terceiro é instável. O primeiro ponto de equilíbrio corresponde ao cenário de fuga do tumor, ilustrado na Figura 2(c), em que a população de células cancerosas atinge a capacidade suporte ($1/b$). O segundo ponto representa o estado

de equilíbrio ilustrado na Figura 2(b). Observe que os valores de C_T , C_M e T correspondem aos obtidos na simulação. A solução trivial obtida como terceiro ponto de equilíbrio não foi observada em qualquer simulação realizada. Entretanto, cabe notar que o decaimento da população de C_M ao longo do tempo, ilustrado na Figura 2(a), é regulado por μ_M e $C_M \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. É possível, então, ajustar o valor de μ_M para que a população de células de memória seja não nula em $t = 1000$ dias, tempo médio de vida do camundongo, garantindo a manutenção da memória imunológica. Assim, este ponto de equilíbrio corresponde ao cenário de eliminação. Podemos então destacar que a análise do sistema dinâmico corrobora com os cenários de eliminação, equilíbrio e escape observados nas simulações realizadas.

Conclusões

A análise do modelo desenvolvido em (RODRIGUES; CARVALHO; ALMEIDA, outubro, 2018) permitiu identificar três diferentes respostas à imunoterapia com células CAR T em camundongos imunodeficientes. Cenários de eliminação, equilíbrio e evasão do tumor podem ocorrer dependendo tanto da relação entre o tamanho do tumor e da intensidade da terapia, quanto da variabilidade dos parâmetros do modelo. A agressividade do tumor, a longevidade das células de memória e a capacidade do tumor evadir da ação do sistema imune são as principais características que impactam a resposta à imunoterapia.

Agradecimentos

Brendon de Jesus Rodrigues agradece o apoio recebido da FAPERJ (2018003008) e do PROEX-CAPES/PPG-LNCC.

Referências

BINNEWIES, M. et al. Understanding the tumor immune microenvironment (TIME) for effective therapy. **Nature Medicine**, v. 24, p. 541–550, 2018.

DUNN, G. P.; OLD, L. J.; SCHREIBER, R. D. Cancer immunoediting: from immunosurveillance to tumor escape. **Annual Review of Immunology**, v. 22, p. 329–360, 2004.

HANAHAN, D.; WEINBERG, R. A. Hallmarks of Cancer: The Next Generation. **Cell**, v. 144, p. 646 – 674, 2011.

KONSTORUM, A. et al. Addressing current challenges in cancer immunotherapy with mathematical and computational modelling. **Journal of the Royal Society Interface**, v. 14(131), p. 20170150, 2017.

MAUDE, S. L. et al. CD19-targeted chimeric antigen receptor T cell therapy for acute lymphoblastic leukemia. **Blood**, The American Society of Hematology, p. blood–2014, 2015.

RODRIGUES, B. de J.; CARVALHO, L.; ALMEIDA, R. C. Modelagem matemática da imunoterapia com células CAR T. **XXI ENMC - Encontro Nacional de Modelagem Computacional e IX ECTM - Encontro de Ciências e Tecnologia de Materiais**, IFFluminense, IPRJ, UESC, outubro, 2018.

RUELLA, M. et al. Overcoming the immunosuppressive tumor microenvironment of hodgkin lymphoma using chimeric antigen receptor T cells. **Cancer Discovery**, v. 10, p. 1154–1167, 2017.

SALTELLI, A. et al. **Global Sensitivity Analysis: The Primer**. England: John Wiley & Sons, 2008.

XPPAUT. **Open-source numerical tool for simulating, analyzing, and animating dynamical systems developed by Bard Ermentrout (version 8.0)**. January 2016. Disponível em: <http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html>.

Modelo Bio-inspirado aplicado na resolução de sistemas não lineares

*Cleber de Almeida Corrêa Junior
Universidade Federal Fluminense
cleberacj@id.uff.br*

*Rosilene Abreu Portella Corrêa
Universidade Federal Fluminense
rosileneportella@id.uff.br*

*Andressa Alves Machado da Silva
Universidade Federal Fluminense
andressa_alves@id.uff.br*

Resumo: Neste trabalho é apresentado o método bio-inspirado de otimização Alcateia, bem como sua aplicação na resolução de sistemas não lineares. Os resultados aqui apresentados são discutidos e confirmam a eficácia do método de otimização Alcateia na resolução de sistemas não lineares, indicando ser uma ferramenta muito viável, para a resolução de sistemas com grande complexidade, quando comparada às ferramentas convencionais existentes

Palavras-chave: Alcateia. Otimização não linear. Sistemas não lineares

Introdução

A constante busca humana pelo aperfeiçoamento dos mais variados processos, com o objetivo em alcançar os melhores resultados, defrontam-se, cotidianamente, com a necessidade de se obter soluções ótimas, de impor restrições, formalizar as variáveis e objetivos de tal forma que a natureza matemática do problema acaba emergindo. Esse processo de modelagem é o que descreve a semelhança entre a realidade cotidiana e o idealismo dos objetos matemáticos. Ou seja, esse processo de modelagem transcreve as situações do cotidiano em forma matemática com o intuito de observá-la, estudá-la e a aperfeiçoá-la. No contexto supracitado, enquadra-se o presente trabalho. Sabe-se que a resolução de sistemas não lineares pode ser uma tarefa árdua, pois métodos práticos para resolver tal sistema consistem em um processo iterativo. Assim, dada uma aproximação inicial gera-se uma sequência de iterados com o intuito de aproximar a mesma, a cada nova iteração, de uma solução do problema. Dentre os processos iterativos, o método de Newton é o mais conhecido e, assim como a maioria dos métodos frequentemente utilizados, apresenta um bom comportamento apenas em uma região próxima da solução, isto é, possui convergência local. Para contornar esse problema é usual incorporarmos alguma estratégia de globalização ao algoritmo, dentre as técnicas mais utilizadas destacamos a busca linear, ver Nocedal e Wright (2006) para detalhes. Desta forma, o método passa a desfrutar de convergência global, ou seja, temos a garantia de que ao menos um ponto de acumulação da sequência gerada pelo algoritmo é solução, ou um ponto estacionário da função de mérito associada. Porém, problemas como: dificuldades (ou impossibilidade) no cálculo das derivadas envolvidas, existência de pontos de celas, ou mínimos globais nos extremos do domínio da função analisada, são alguns bons exemplos de casos que levam métodos baseados no gradiente a falharem na busca por soluções dos sistemas não lineares (Martinez, 2000). Diante do exposto, apresenta-se a seguir uma alternativa para a resolução de sistemas não lineares.

O Método Alcateia

O método Alcateia foi proposto por Corrêa Junior e Portela Corrêa (2017) e tem como base o padrão comportamental dos lobos durante o seu processo de caça. As alcateias possuem uma estrutura bem

definida, existindo um casal de lobos líderes denominados de lobos alfas. Durante a caça o lobo alfa, escolhe a presa a ser atacada, para essa escolha ele visa ou o animal mais velho ou o mais novo ou aquele que está adoentado, ou seja, a presa ótima. Além disso, os lobos alfas são os primeiros a se alimentarem e os únicos que podem se reproduzirem. Quando outros lobos pretendem tomar a posição do lobo alfa na alcateia, há uma batalha entre eles sendo considerado o novo lobo alfa aquele que vence essa batalha (PORTELLA CORRÊA e CORRÊA JUNIOR, 2017).

Essas características comportamentais são a base do algoritmo Alcateia. A cada iteração do algoritmo, o lobo alfa será aquele que encontrar a presa mais acessível, ou seja, aquele que possuir a melhor solução daquela iteração. Além disso, todos os outros lobos tendem a atacar a presa escolhida pelo lobo alfa, isso é caracterizado no algoritmo através do coeficiente de independência, que faz com que os outros lobos converjam para a solução do problema, refinando a solução encontrada a cada iteração. Tal coeficiente é inserido no algoritmo pela equação (1):

$$\mathbf{x}_0 = \frac{i_d \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{\text{alfa}}}{i_d + 1} \quad (1)$$

com $\mathbf{x}_0$ sendo um lobo qualquer e $\mathbf{x}_{\text{alfa}}$ sendo o lobo alfa. O valor do coeficiente de independência (i_d) é definido no inicial do método.

Com isso, a ideia básica do algoritmo Alcateia é que iniciando com uma ampla região de busca do domínio da função objetivo $f_0(\mathbf{x})$, várias possíveis soluções (os lobos) são selecionadas. Essa região de busca é reduzida a cada iteração fazendo que essas possíveis soluções converjam para a solução ótima do problema.

Essa redução da região de busca é representado no algoritmo pela diminuição do número de laços internos conforme são executados os laços externos. No padrão comportamental dos lobos, os laços internos representam o posicionamento dos lobos no cerco da presa enquanto que os laços externos representam os lobos indo em direção à presa.

A grande vantagem na utilização do algoritmo Alcateia é a sua capacidade de resolução de problemas com inúmeros mínimos locais, pois muitos problemas de modelagem possuem como uma das suas dificuldades a existência de muitos mínimos locais. Esse fato faz com que grande parte dos algoritmos de otimização sejam excessivamente dependentes das condições iniciais para a garantia da sua convergência para o ótimo global.

A seguir, no algoritmo 1 é apresentado o pseudocódigo para o Alcateia utilizado nesse trabalho.

Algorithm 1 Algoritmo Alcateia

```

1: Dados  $\mathbf{x}_0$  ,  $L_e$  ,  $L_i$  ,  $N_{lobos}$  ,  $c$  ,  $i_d$  ,  $\Delta$ ;
2: Para  $i = 1, 2, \dots, L_e$  faça
3:    $\text{aux} = \mathbf{x}_0$ ;
4:   Para  $j = 1, 2, \dots, L_i$  faça
5:     Para  $k = 1, 2, \dots, N_{lobos}$  faça
6:        $\mathbf{x}[:, k] = \mathbf{x}_0[:, k] + \lambda_k * \Delta[:, k]$ , onde  $\lambda_k$  é um vetor de números
7:       aleatórios entre  $-1$  e  $1$  e  $*$  é o produto termo-a-termo de vetores;
8:       Se ( $f(\mathbf{x}[:, k]) < f(\mathbf{x}_0[:, k])$ ) então
9:          $\mathbf{x}_0[:, k] = \mathbf{x}[:, k]$ ;
10:         $g[k] = f(\mathbf{x}[:, k])$ ;
11:       Fim Se;
12:     Fim Para;
13:   Fim Para;
14:    $[f_{\text{alfa}} p] = \min(g)$ , onde a função  $\min(g)$  retorna a componente de menor
15:   valor de  $g$ ,  $f_{\text{alfa}}$  e sua posição  $p$ ;
16:    $\mathbf{x}_{\text{alfa}} = \mathbf{x}_0[:, p]$ ;
17:    $L_i = L_i \cdot (1 - c)$ ;
18:   Para  $t = 1, 2, \dots, N_{lobos}$  faça
19:      $\mathbf{x}_0[:, t] = \frac{i_d \cdot \mathbf{x}_0[:, t] + \mathbf{x}_{\text{alfa}}}{i_d + 1}$ ;
20:      $\Delta[:, t] = |\mathbf{x}_0[:, t] - \text{aux}[:, t]|$ 
21:   Fim Para;
22: Fim Para

```

Sistema não Linear modelado como um problema de Otimização

Para modelar um sistema não linear como um problema de minimização não linear, precisar-se definir a função objetivo $f_0(\mathbf{x})$ em termos das componentes da função vetorial $F(\mathbf{x})$ do referido sistema. Com esse propósito, na sua definição será utilizado o conceito da norma L_p de Hölder, resultando na seguinte definição (SILVA, 2010):

$$f_0(\mathbf{x}) \equiv L_p = \left\{ \sum_{i=1}^n |f_i(\mathbf{x})|^p \right\}^{1/p} \quad (2)$$

onde $p \in \mathbb{N}$ e n é a dimensão do espaço vetorial.

No estudo dos problemas de minimização, temos três casos especiais para a norma L_p de Hölder.

Se $p = 1$ tem-se

$$f_0(\mathbf{x}) \equiv L_1 = \sum_{i=1}^n |f_i(\mathbf{x})|. \quad (3)$$

Portanto, utilizando a norma L_1 para a função objetivo $f_0(\mathbf{x})$ minimiza-se a soma dos valores absolutos das componentes da função vetorial $F(\mathbf{x})$. Este problema é conhecido na literatura como problema de minimização da norma L_1 .

Se $p = 2$ tem-se

$$f_0(\mathbf{x}) \equiv L_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n |f_i(\mathbf{x})|^2 \right\}^{1/2}. \quad (4)$$

Nesse caso, minimiza-se a raiz quadrada da soma dos quadrados das componentes. Quando a raiz quadrada é omitida, minimiza-se a soma dos quadrados das componentes. O problema de minimizar a soma dos quadrados é conhecido na literatura como um problema de mínimos quadrados. A norma L_2 é a norma Euclidiana, ou seja, é a norma dos espaços vetoriais euclidianos.

Os problemas de mínimos quadrados não lineares são uma classe de problemas de otimização sem restrições que mais surgem nas aplicações e podem mesmo ser considerados a fonte da maior parte dos problemas de otimização não linear sem restrições.

Se $p \rightarrow +\infty$ temos

$$f_0(\mathbf{x}) \equiv L_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n |f_i(\mathbf{x})|^p \right\}^{1/p}. \quad (5)$$

Suponha que o máximo de $|f_i(\mathbf{x})|$ seja único e indicando-o por G tal que

$$G = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(\mathbf{x})| \quad (6)$$

reescrevendo a Equação (5)

$$f_0(\mathbf{x}) \equiv L_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n |f_i(\mathbf{x})|^p \right\}^{1/p} = G \lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{|f_i(\mathbf{x})|^p}{|G|^p} \right\}^{1/p}. \quad (7)$$

Como todos os componentes do somatório são menores que um, exceto G , quando $p \rightarrow +\infty$ todas as potências p desses termos tenderão para zero. Então, obtemos

$$f_0(\mathbf{x}) = G \cdot 1 = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(\mathbf{x})|. \quad (8)$$

Portanto, quando toma-se a norma L_∞ deseja-se minimizar a componente de maior valor absoluto. Este problema é conhecido na literatura como um problema minimax.

Utilizando o conceito da norma euclidiana, o sistema não linear pode ser transformado em um problema de minimização não linear (Silva, 2010). Para isso, cada função componente da função vetorial $F(\mathbf{x})$ é elevada ao quadrado e convertida em uma parcela de uma soma, compondo uma função objetivo $f_0(\mathbf{x})$ não negativa, na forma

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m |f_i(\mathbf{x})|^2 = (f_1(\mathbf{x}))^2 + (f_2(\mathbf{x}))^2 + \dots + (f_m(\mathbf{x}))^2. \quad (9)$$

Com isso, o sistema não linear é transformado em um problema de minimização não linear, assumindo a sua forma geral:

$$\text{Minimizar } f_0(\mathbf{x}), \text{ com } \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n. \quad (10)$$

Resultados

Apresentam-se agora os resultados obtidos para dois problemas clássicos na área de sistemas não lineares, transformados em problemas de otimização e resolvidos pelo método Alcateia. Vale destacar que neste trabalho o algoritmo Alcateia foi executado 100 vezes para cada sistema não linear, posteriormente contabilizada todas as soluções encontradas para os respectivos sistemas não lineares. Os tempos apresentados nas tabelas de resultados, referem-se a tempos médios para encontrar as respectivas soluções.

Tabela 1: Parâmetros do método Alcateia utilizados na resolução dos SNLs abordados.

Nome	Constante	Valor
Número de lobos	N_{Lobos}	100
Coefficiente de contração	c	0,01
Laços internos	L_i	500
Laços externos	L_e	100
Constante de independência	i_d	4

Problema trigonométrico exponencial (PTE)

O sistema não linear (11) descreve um problema trigonométrico exponencial (PTE) que foi proposto pelos pesquisadores Maranas e Floudas (1995). Este problema possui 2 soluções distintas na região do domínio considerada e é descrito, juntamente com suas restrições:

$$\begin{cases} 0,5 \sin(x_1 x_2) - \frac{0,25 x_2}{\pi} - 0,5 x_1 = 0, \\ \left(1 - \frac{0,25}{\pi}\right) (e^{2x_1} - e) + \frac{e x_2}{\pi} - 2 e x_1 = 0, \\ 0,25 < x_1 < 1,5, \\ 1,5 < x_2 < 2\pi. \end{cases} \quad (11)$$

Tabela 2: Soluções distintas para o sistema trigonométrico exponencial (STE).

Tolerância = 10^{-5}				
Solução	x_1	x_2	$f(\mathbf{x})$	Tempo (s)
Alcateia				
1	0,295740	2,827544	$3,4337 \cdot 10^{-6}$	0,520500
2	0,499183	3,141708	$3,6672 \cdot 10^{-7}$	0,497242

Problema cinemática robótica (PCR)

Um outro problema que será utilizado neste trabalho é o da cinemática robótica, que é bastante utilizado em análises cinemáticas de manipuladores robóticos (SILVA, 2010). Este problema possui 8 equações, 8 variáveis e 16 soluções distintas. Além disso, o PCR não possui restrições de domínio. Assim, descreve-se o PCR como:

$$\begin{cases} 0,004731x_1x_3 - 0,3578x_2x_3 - 0,1238x_1 + x_7 - 0,001637x_2 - 0,9338x_4 - 0,3571 = 0, \\ 0,2238x_1x_3 + 0,7623x_2x_3 + 0,2638x_1 - x_7 - 0,07745x_2 - 0,6734x_4 - 0,6022 = 0, \\ x_6x_8 + 0,3578x_1 + 0,004731x_2 = 0, \\ -0,7623x_1 + 0,2238x_3 + 0,3461 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0, \\ x_5^2 + x_6^2 - 1 = 0, \\ x_7^2 + x_8^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Tabela 3: Soluções distintas para a aplicação em cinemática robótica.

Tolerância = 10 ⁻⁵										
S	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	f(x)	Tempo (s)
Alcateia										
1	0,6958	-0,7183	0,8226	-0,5686	-0,9662	0,2575	-0,3030	-0,9530	3,9007 · 10 ⁻⁷	2,134861
2	0,2748	0,9616	-0,6108	-0,7920	0,9923	0,1243	-0,5564	-0,8312	6,4337 · 10 ⁻⁷	1,862739
3	0,6964	-0,7172	0,8228	-0,5681	-0,9666	-0,2573	-0,3018	0,9536	1,4853 · 10 ⁻⁶	2,197444
4	0,2754	0,9611	-0,6109	-0,7915	-0,9922	-0,1239	-0,5562	0,8310	8,4854 · 10 ⁻⁷	1,535538
5	0,1761	-0,9845	-0,9469	-0,3223	-0,9978	-0,0647	0,4107	0,1217	1,3569 · 10 ⁻⁶	1,576985
6	0,7332	0,6803	0,9524	-0,3043	-0,9572	0,2892	0,3937	-0,9194	7,7025 · 10 ⁻⁷	1,884437
7	0,7327	0,6797	0,9521	-0,3034	0,9578	-0,2885	0,3938	0,9195	6,9738 · 10 ⁻⁶	1,516908
8	0,1753	-0,9849	-0,9469	-0,3218	-0,9984	0,0637	0,4111	-0,9117	1,7780 · 10 ⁻⁶	2,045615
9	0,7338	0,6799	0,9518	-0,3047	-0,9572	-0,2894	0,3937	0,9198	4,2834 · 10 ⁻⁶	2,781412
10	0,1764	-0,9842	-0,9466	-0,3223	0,9978	0,0639	0,4105	-0,9118	2,8430 · 10 ⁻⁷	2,150764
11	0,1768	-0,9842	-0,9470	-0,3220	0,9981	-0,0639	0,4110	0,9119	1,2414 · 10 ⁻⁶	1,637506
12	0,6954	-0,7187	0,8233	-0,5682	0,9663	-0,2577	-0,3037	0,9527	1,2397 · 10 ⁻⁶	2,259840
13	0,2759	0,9607	-0,6109	-0,7917	0,9925	-0,1235	-0,5565	0,8301	4,9757 · 10 ⁻⁶	1,928129
14	0,7328	0,6787	0,9524	-0,3050	0,9575	0,2892	0,3919	-0,9204	8,5757 · 10 ⁻⁶	2,040813
15	0,2745	0,9615	-0,6107	-0,7918	-0,9924	0,1235	-0,5562	-0,8310	1,2079 · 10 ⁻⁷	2,557084
16	0,6997	-0,7138	0,8240	-0,5669	0,9656	0,2594	-0,3001	-0,9538	9,4778 · 10 ⁻⁶	2,414648

Conclusões

O presente trabalho propôs uma nova metodologia para a resolução de sistemas não lineares, baseada no comportamento dos lobos, a qual obteve ótimos resultados para os sistemas testados, evidenciando seu potencial. Como sequência deste trabalho pretende-se avaliar o desempenho do algoritmo Alcateia em relação a sistemas não lineares mais complexos, além de outras áreas como a busca de ótimos em problemas de contexto multi-objetivo e/ou em problemas de engenharia.

Agradecimentos

Ao apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).
Ao apoio do Instituto do Noroeste Fluminense de Educação Superior da UFF (INFES/UFF).

Referências

CORRÊA JUNIOR, C. A.; PORTELLA CORRÊA, R. A. Alcateia - Um Novo Algoritmo Para Otimização **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 5,n.1, p. 010475-1 - 010475-7, 2017.

MARANAS, C.D. and FLOUDAS, C.A., Finding All Solutions of Nonlinearly Constrained Systems of Equations, **Journal Global Optimization**, v. 7, p. 143-182, 1995.

MARTINEZ, J. M. Practical quasi-Newton methods for solving nonlinear system?. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 124, p. 97-122, 2000.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S.J. **Numerical Optimization**. 1. ed. New York: Springer, 2006.

PORTELLA CORRÊA, R. A.; CORRÊA JUNIOR, C. A. Uma Aplicação Prática do Método Alcateia em um Problema de Identificação de Danos em uma Viga. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 5,n.1, p. 010196-1 - 010196-7, 2017.

SILVA, M. R. **Um Novo Método Híbrido Aplicado à Solução de Sistemas Não-Lineares com Raízes Múltiplas**, 2010. 154 f. Tese de doutorado – Instituto Politécnico, UERJ, Nova Friburgo, 2010.

Projeto Ótimo de Rede de Irrigação Semi-Mecanizada de Grande Escala

Larissa Thomaz

Centro Universitário Norte do Espírito Santo (CEUNES/UFES)

larissathomaz10@gmail.com

Gilberto de Miranda Jr.

Centro Universitário Norte do Espírito Santo (CEUNES/UFES)

gilbertomirandajr@gmail.com

Resumo: Diante da crise hídrica no Brasil, é fundamental que o uso da água na irrigação seja feito de maneira racional. A necessidade de economia demanda técnicas e métodos otimizantes no planejamento de sistemas de irrigação, de modo que se possa garantir sustentabilidade através da minimização do volume de água utilizado. Este trabalho utiliza técnicas de pesquisa operacional aplicadas a modelos matemáticos de minimização de custos para o projeto ótimo de rede de irrigação semi-mecanizada de grande escala. Além de um modelo adequadamente descritivo e minimamente solucionável, resultados promissores foram obtidos com o uso da técnica de Programação Disjuntiva na elaboração de uma formulação mais forte.

Palavras-chave: Teoria de Otimização. Programação Não Linear Inteira-Mista. Irrigação Semi-Mecanizada. Gerenciamento de Recursos hídricos.

Introdução

A distribuição de água no globo terrestre está longe de ser equilibrada, sendo este um dos recursos naturais mais valiosos do mundo. Além de ser indispensável para uso cotidiano de toda a população é essencial para o desenvolvimento econômico de um país. Mediante a necessidade de encontrar uma forma de melhor aproveitamento do uso da água, neste trabalho, foram utilizadas técnicas de pesquisa operacional aplicadas a modelos de programação matemática compostos tipicamente por duas partes: uma função escalar de várias variáveis, denominada função-objetivo e um conjunto determinado por outras funções limitantes, denominadas restrições.

Do esforço de solução ótima não só deve resultar o projeto de rede que consuma a menor quantidade de água, mas a estrutura mais barata. Sendo assim, o problema de otimização tem mais de uma parcela na função-objetivo e tais parcelas são conflitantes, uma vez que existirão projetos de redes com elevado custo e baixo consumo até aqueles com baixo custo e elevado consumo.

O modelo matemático aqui construído pertence a classe de problemas inteiros mistos sujeito às restrições quadráticas, um ramo da otimização que é caracterizado por ser um dos mais difíceis de se atacar, pois não dispõe de algoritmos de performance razoável. Além disso, a parte quadrática dada pelas *Equações de Hazen-Williams* limita severamente a possibilidade de obtenção de prova de otimalidade para instâncias de tamanho realístico.

Outro fator complicante quando se busca a solução é o fato do problema ser inteiro-misto e em sua forma original ser não-convexo. O problema se tornaria ainda mais complicado com o uso das Equações de Navier-Stokes, uma vez que não existe prova da existência de soluções para as mesmas e essas são pertencentes à classe denominada de *Problemas do Milênio*.

Metodologia

Segundo Gomes (2013), a operação de sistemas de abastecimento de água, composta pelas obras de captação, adução, uso de estações de bombeamento, redes de distribuição, reservatórios e dispositivos de

controle (válvulas), compreende um conjunto de ações necessárias à distribuição de água aos pontos de consumo, com vazão e pressão suficientes.

Dessa forma, utilizou-se um grafo direcionado para representar o sistema, onde os nodos representam a fonte e os pontos de consumo, e os arcos são os tubos de ligação entre os nodos, ambos respeitando as propriedades físicas e as restrições impostas pelo problema. Essas são apresentadas abaixo:

- A conservação do fluxo em cada nodo;
- A perda de carga (energia potencial) ao longo do sistema.

Além disso, para efeito de simplificação do modelo, optou-se por adicionar as seguintes hipóteses de modelagem:

- O nodo zero é o nodo fonte, independente da dimensão da rede;
- A distância entre os nodos com possibilidade de ligação direta é sempre igual;
- A rede será representada de modo retangular;
- Não existe ligação direta entre nodos na diagonal;
- O nodo fonte da rede é o que possui a maior altura (h_0);
- A topologia é fixa e a área de cultivo é plana;
- A enumeração da rede acontece obedecendo uma ordenação topológica, ou seja, os caminhos orientados percorrem os vértices em ordem crescente, já que existe fluxo apenas em um dos dois sentidos. Portanto, na ligação nodo i a nodo j há somente ligação de ida, ou seja, se o nodo i está ligado ao nodo j , tais que, $i < j$ considera-se apenas a ligação de i para j , ou seja, o arco (i, j) . Deste modo, foram desconsideradas todas as ligações de volta, já que isso demandaria esforço desnecessário da bomba.

Portanto, o problema proposto pertence à classe de problemas de Programação Não-Linear Inteira Mista (PNLIM) sujeitos a restrições quadráticas de complementaridade. De acordo com Melo (2016), recentemente, problemas dessa classe têm sido o tema de estudos em diversas áreas de pesquisa teórica em otimização de sistemas.

Geralmente é muito difícil resolver um problema de PNLIM. Dois fatores principais contribuem para a dificuldade de resolução desses problemas: a não-convexidade, que possibilita a presença de múltiplas soluções locais, e a natureza combinatória promovida pela presença de variáveis inteiras.

A técnica escolhida foi o método de Decomposição de Benders, combinado com modelagem para programação disjuntiva e aproximação externa. O Método de Decomposição de Benders foi criado por Benders (1962). Esse método dispõe de inúmeros casos de sucesso como descrito nos trabalhos de Geoffrion e Graves (1974).

Mais recentemente, outros casos de sucesso foram relatados na literatura especializada, e para uma revisão completa e atualizada da técnica, pode-se acessar a revisão feita por Rahmaniani et al. (2017). No que tange ao problema específico, são importantes os trabalhos de D'Ambrosio et al. (2015) e Bonvin et al. (2015). Entretanto, é válido ressaltar que em ambos os casos, as redes tratadas seriam pequenas se comparada à sistemas de irrigação de porte realístico.

Dessa forma, o modelo matemático clássico do sistema de irrigação respeitando as propriedades físicas e as restrições impostas é proposto como segue:

$$\text{Minimize } z = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}x_{ij} + h_0 \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{(j,i) \in E} q_{ji} - \sum_{(i,j) \in E} q_{ij} = d_i, \forall i \in N, \quad (2)$$

$$q_{ij} \leq Q x_{ij}, \forall (i, j) \in E, \quad (3)$$

$$x_{ij}(h_i - h_j - \kappa q_{ij}^2) = 0, \forall (i, j) \in E. \quad (4)$$

$$q_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \in E, \quad (5)$$

$$h_i \geq 0, \forall i \in N, \quad (6)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = 1, \forall j \in N, \quad (7)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in E. \quad (8)$$

Em que N é o conjunto de todos os nodos existentes, e E é o conjunto de todos os arcos possíveis, (1) é a função objetivo a ser minimizada, (2) é a equação de conservação do fluxo, (3) é a restrição de ativação dos arcos e (4) é *Equação de Hazen-Williams* combinada com a restrição de existência do tubo, que calcula a perda de carga, fazendo a conversão de energia potencial em energia cinética, garantindo que o sistema de pressões nodais em i e j e o fluxo q_{ij} faça sentido físico, (5) e (6) são restrições de não negatividade do fluxo e das alturas, respectivamente. A restrição (7) permite somente a geração de topologias do tipo árvore e (8) garante a integralidade da variável topológica de instalação do tubo.

Logo, é necessário decidir simultaneamente a vazão da tubulação e a instalação ou não do tubo, quando se deseja combinar num mesmo problema de o projeto da rede de tubos e a minimização da perda de carga e para viabilizar o funcionamento. A restrição (4) implementa o acoplamento da pressão e a vazão. Entretanto, um resultado bem conhecido em Programação Não-Linear (PNL) é a natureza não-convexa toda restrição de igualdade não-linear. Com o uso de uma técnica de relaxação, as igualdades de (4) são relaxadas para inequações, obtendo-se:

$$x_{ij}(h_i - h_j - \kappa q_{ij}^2) \geq 0, \forall (i, j) \in E. \quad (9)$$

Todavia, ainda existe o produto de x_{ij} por q_{ij}^2 , sendo necessário linearizar o produto em (9), para isso utiliza-se o método do M -grande seguindo Sawaya e Grossmann (2005), assim as restrições (9) tornam-se:

$$h_i - h_j \geq \kappa q_{ij}^2 - M_{ij}(1 - x_{ij}), \forall (i, j) \in E. \quad (10)$$

Note que o problema ainda é de PNLIM com restrições não-lineares (quadráticas), mas como é convexo, é tratável via *Branch-and-Bound (B&B)* Melo (2016).

Segundo Junior e Arenales (2008), encontrar a solução utilizando a técnica M -grande se torna difícil para grandes instâncias. Como o valor do parâmetro penalizador em M -grande deve crescer com o quadrado da demanda total, que aumenta linearmente com o número de nós da rede com o tamanho do problema, deve-se perder qualidade nos limitantes contínuos de maneira análoga.

Além disso, M_{ij} deve ser grande o suficiente para evitar que as alturas de nodos desligados estejam correlacionadas (o efeito necessário), então as restrições devem também estar desligadas quando x_{ij} é fracionário ($0 < x_{ij} < 1$), afastando assim os limitantes contínuos de sua contraparte inteira. Logo, deve ser necessário percorrer um número grande de nós na árvore de *Branch-and-Bound* para obter a prova de otimalidade de uma dada solução incumbente. Assim é de vital importância o desenvolvimento de formulação alternativa ao método do M -grande, caso seja requerida a solução de instâncias de tamanho realístico.

Assim, um esforço de linearização externa é então realizado no intuito de melhorar a estabilidade numérica através de:

$$\sigma_{ij} \geq [q_{ij}^l]^2 + 2q_{ij}^l (q_{ij} - q_{ij}^l), \forall (i, j) \in E, \forall l \in L. \quad (11)$$

Em que σ_{ij} é dado pelo valor máximo de $l \in L$ aproximações de primeira ordem para q_{ij}^2 , ou seja, é um limite inferior obtido por linearização externa, resultando um PLIM. Nota-se que o dilema do M -grande não é impactado pelo esforço de linearização. Dadas as dificuldades impostas pelo modelo corrente derivadas da pobreza dos limitantes de PL associados, derivou-se um novo modelo pela aplicação da técnica de programação disjuntiva conforme Balas (1979), Balas (1985) e Balas (1998).

Aplicando o método de programação disjuntiva, obtém-se o seguinte modelo matemático:

$$\text{Minimize } z = \sum_{(j,i) \in E} c_{ij}x_{ij} + h_0 \quad (12)$$

sujeito a (2), (3), (5), (6), (7), (8), (11) e ainda:

$$h_w - h_j \geq k \sigma_{wj}, \forall j \in \omega_1, \quad (13)$$

$$h_s - h_j \geq k \sigma_{sj}, \forall j \in \omega_1, \quad (14)$$

$$h_w - \sum_{r=0}^M r h_{rj}^w \geq k \sigma_{wj}, \forall j \in \omega_2, \quad (15)$$

$$h_s - \sum_{r=0}^M r h_{rj}^s \geq k \sigma_{sj}, \forall j \in \omega_2, \quad (16)$$

$$h_j = \sum_{r=0}^M r h_{rj}^w + \sum_{r=0}^M r h_{rj}^s, \forall j \in \omega_2, \quad (17)$$

$$\sum_{r=0}^M h_{rj}^w + \sum_{r=0}^M h_{rj}^s = 1, \forall j \in \omega_2, \quad (18)$$

$$\sum_{r=0}^M h_{rj}^w = x_{wj}, \forall j \in \omega_2, \quad (19)$$

$$\sum_{r=0}^M h_{rj}^s = x_{sj}, \forall j \in \omega_2. \quad (20)$$

As restrições (13)-(20) foram propostas segundo a metodologia de Martin (2012). Desse modo, a formulação utilizando programação disjuntiva é superior ao modelo com M -grande porque, além de não conter restrições não-lineares, fornece limitantes inferiores melhores, demandando enumerar menos nodos para provar a otimalidade de uma dada solução incumbente. Entretanto isso significa lidar com um número bem maior de restrições e variáveis de decisão, e consequentemente há esforço computacional adicional, podendo resultar em um maior tempo de processamento para algumas instâncias.

Resultados e Discussões

Diversos testes foram realizados para avaliar a escalabilidade das abordagens desenvolvidas assim como sua sensibilidade aos parâmetros de entrada, tais como: Demandas específicas por cultura, custos de obtenção de recursos hídricos e custos de instalação de infraestrutura tais como tubulação, torre, reservatórios e bombas.

A plataforma de computação utilizada na realização dos experimentos foi um servidor Dell PowerEdge T760 equipado com um processador Intel Xeon E5-2600v2 de oito núcleos cada, dispondo de memória RAM de 96 Gb. Na execução de cada processo foi permitido o uso de quatro *threads*, e os pacotes de software usados foram a linguagem de modelagem algébrica *AMPL* e o resolvidor *IBM CPLEX 12.7.0*, ambos capazes de fornecer soluções de problemas de programação inteira mista sujeitos a restrições quadráticas.

Na realização dos experimentos computacionais utilizou-se 15 instâncias geradas pseudo-aleatoriamente, cuja a matriz de distância baseada na Distância Manhattan foi medida em diversos *grids* de tamanhos variados. O conjunto de demandas nodais foi sorteado seguindo uma distribuição uniforme, podendo assumir valores entre 1 e 10, além disso, admitiu-se a distância de cada arco da rede como uma unidade de comprimento. Dessa forma, as instâncias têm um grande número de graus de simetria, tornando-se particularmente difícil a obtenção de prova de otimalidade através de métodos exatos, tais como a estratégia *Branch-and-Bound*.

As instâncias aplicadas nos testes são mostradas na Tabela 1, em que a primeira coluna representa o tamanho do *grid*, na sequência tem-se o número de nós da rede e o número de arcos potenciais usados. A quarta coluna contém o número máximo de soluções inteiras viáveis possíveis para uma dada instância avaliado a partir do número de árvores subjacentes a cada rede. Do ponto de vista experimental, essa coluna permite estimar a eficiência do algoritmo pelo cálculo da fração do número de soluções efetivamente empregado na obtenção de limitantes até a convergência.

Tabela 1: Dados das instâncias utilizadas nos testes.

Malha	$ N $	$ E $	$ T $
5x5	25	40	6.29 EXP+010
5x6	30	49	2.83 EXP+013
5x7	35	58	1.28 EXP+016
5x8	40	67	5.86 EXP+018
6x6	36	60	5.19 EXP+016
6x7	42	71	9.58 EXP+019
6x8	48	82	1.78 EXP+023
7x7	49	84	7.18 EXP+023
7x8	56	97	5.39 EXP+027
7x9	63	110	4.07 EXP+031
7x10	70	123	3.07 EXP+035
8x8	64	112	1.64 EXP+032
8x9	72	127	4.98 EXP+036
8x10	80	142	1.52 EXP+041
9x9	81	144	6.11 EXP+041

Portanto, às instâncias descritas na Tabela 1 foram aplicadas as implementações produzidas em ambos os modelos trabalhados. Os resultados obtidos são exibidos na Tabela 2.

Um exame minucioso da Tabela 2 permite traçar algumas conclusões e realizar certas análises, apesar volume de testes não ter sido necessariamente exaustivo. Como se pode observar, os limitantes inferiores obtidos via Programação Linear são razoavelmente superiores para a formulação que emprega Programação Disjuntiva em todos os casos resolvidos. Estes resultados eram esperados e estão de acordo com o conhecimento disponível na literatura científica sobre essa relevante técnica de modelagem.

Há ainda pelo menos dois casos para os quais a formulação que usa o artifício do M -grande não foi capaz de provar a otimalidade da solução incumbente disponível mesmo dispondo de 10 dias de máquina. Embora não seja possível afirmar que o número de nodos de pesquisa na árvore de enumeração implícita seja sempre menor para o modelo de Programação Disjuntiva, sem dúvida essa tendência é sublinhada, especialmente quando os problemas-teste se tornam maiores e/ou mais difíceis.

Por outro lado, o peso maior atribuído às restrições e variáveis adicionais cobra seu preço: os tempos de máquina são em geral desfavoráveis ao modelo de Programação Disjuntiva. A exceção ocorre apenas para as redes não resolvidas pela formulação mais simples. Espera-se entretanto que ao se desenvolver e otimizar uma técnica capaz de gerenciar implicitamente tais restrições e variáveis adicionais seja possível, pelo menos para casos difíceis e/ou de maior porte, obter comportamento superior para a aplicação do modelo de Programação Disjuntiva. Tal esforço de implementação será alvo de trabalhos e pesquisas futuras, objetivando dispor de meios de calcular rapidamente limitantes inferiores justos para problemas grandes e difíceis, viabilizando o uso da técnica para apoio a decisão e projeto em nível de Engenharia. Os resultados obtidos são exibidos em forma gráfica na Figura (1) para complementar a

análise.

Tabela 2: Resultados obtidos para os modelos apresentados com implementações via CPLEX e AMPL. As entradas marcadas com *a* correspondem a tempos de máquina superiores a 10 dias de computação.

Malha	Nodos	PD			M-Grande		
		Núm. Nodos (B&B)	Lower Bound	Tempo [s]	Núm. Nodos (B&B)	Lower Bound	Tempo [s]
5x5	25	521	80	1	699	57	0
5x6	30	4479	106	6	5842	71	2
5x7	35	1157	133	4	1266	89	1
5x8	40	5195	170	20	6105	105	4
6x6	36	5019	138	12	7903	83	5
6x7	42	8528	180	27	9474	103	5
6x8	48	28541	221	118	27229	121	19
7x7	49	222684	231	682	382969	117	217
7x8	56	2218413	293	12255	1347692	137	965
7x9	63	983066	357	7112	1836690	159	1751
7x10	70	11086532	433	157253	a	185	a
8x8	64	6577733	369	61356	7032513	153	7338
8x9	72	625853	448	7221	1669360	179	1716
8x10	80	4211008	528	9914	a	205	a
9x9	81	8984208	544	145578	13361476	218	29214

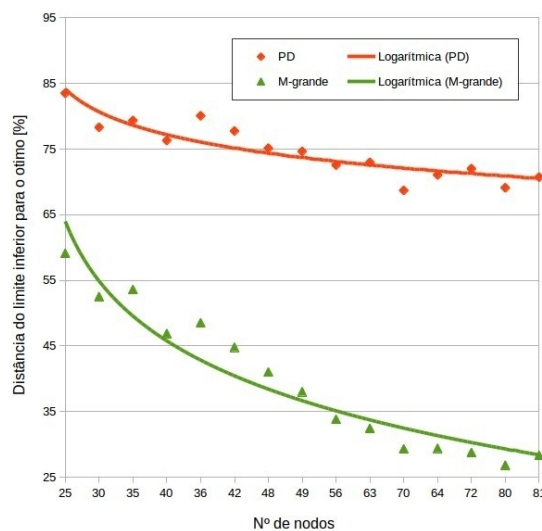


Figura 1: Comportamento dos limites inferiores conforme o tamanho da rede aumenta.

Conclusão

Este trabalho propõe dois modelos matemáticos para determinar o projeto ótimo de redes de irrigação semi-mecanizada de grande escala. Garante-se o atendimento de restrições de natureza física tais como conservação de fluxo e de energia mecânica.

Também se busca atender restrições lógicas de projeto de rede tais como garantir a obtenção de arborescências e forçar coerência entre fluxos e topologia. Do esforço inicial de formulação resulta um programa matemático não-linear e não-convexo considerado intratável. Diversas hipóteses de modela-

gem são então utilizadas para permitir a solução e/ou obtenção de bons limitantes para a solução do problema.

Desta nova investida resultam duas formulações para o problema, uma delas veloz mas fraca, oferecendo limitantes inferiores que degradam rapidamente à medida que aumenta o tamanho da rede alvo. A outra formulação, que emprega a técnica de Programação Disjuntiva, é maior e mais cara de computar, mas oferece limitantes inferiores de qualidade superior, conforme mostram os experimentos computacionais realizados.

Trabalhos futuros deverão implantar e refinar técnicas de decomposição capazes de lidar com a carga adicional de computação de maneira implícita, permitindo explorar melhor os limitantes inferiores fornecidos pelo modelo de Programação Disjuntiva e assim viabilizar a solução de intâncias de porte realístico.

Referências

- BALAS, E. Disjunctive Programming. **Annals of Discrete Mathematics**, v. 5, p. 3-51, jan. 1979.
- BALAS, E. Disjunctive Programming and a Hierarchy of Relaxations for Discrete Optimization Problems. **Journal on Algebraic Discrete Methods**, v. 6, n. 3, p. 466-486, 1985.
- BALAS, E. Disjunctive programming: Properties of the convex hull of feasible points. **Discrete Applied Mathematics**, v. 89, n. 1-3, p. 3-44, 1998.
- BENDERS, J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. **Numerische Mathematik**, v. 4, n. 1, p. 238-252, 1962.
- BONVIN, G. et al. A convex mathematical program for pump scheduling in a class of branched water networks. **Applied Energy**, v. 185, p. 1702-1711, 2015.
- D'AMBROSIO, C. et al. Mathematical programming techniques in water network optimization. **European Journal of Operational Research**, v. 243, n. 3, p. 774-788, 2015.
- GEOFFRION, A. M.; GRAVES, G. W. Multicommodity Distribution System Design by Benders Decomposition. **Management Science**, v. 20, n. 5, p. 822-844, 1974.
- GOMES, H. P. **Sistemas de Irrigação: Eficiência Energética**. Editora da UFPB, João Pessoa. 2013.
- JUNIOR, P. A. M. ; ARENALES, M. N. Uma Abordagem Implícita para o Método M-Grande. **XL Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, João Pessoa, Paraíba. p. 2193-2204, 2008.
- MARTIN, R. K. **Large Scale Linear and Integer Optimization: A Unified Approach**. In: [s.l: s.n.]. v. 1, p. 565-630, 2012.
- MELO, W. A. X. DE. **Novas abordagens de solução para programação não linear inteira mista binária e programação quadrática não convexa**. 2016. 118f. (Teste Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação), COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro. 2016.
- RAHMANIANI, R. et al. The Benders decomposition algorithm: A literature review. **European Journal of Operational Research**, v. 259, n. 3, p. 801-817, jun. 2017.
- SAWAYA, N. W.; GROSSMANN, I. E. A cutting plane method for solving linear generalized disjunctive programming problems. **Computers e Chemical Engineering**, v. 29, n. 9, p. 1891-1913, 2005.

A ANÁLISE DE ERROS EM PROGRESSÕES ARITMÉTICAS (PA): DIAGNOSTICO COM DISCENTES DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO.

Alexandre Dias dos Santos

Universidade Federal do Sul da Bahia

x_andydias@hotmail.com

Regina Maria da Costa Smith Maia.

Universidade Federal do Sul da Bahia

regiabh@gmail.com

Resumo: Esta pesquisa tem como objetivo analisar e classificar os erros cometidos por discentes do segundo ano do ensino médio, de uma escola pública de Teixeira de Freitas (BA), na resolução de questões sobre Progressões Aritméticas (PA). Para essa análise, foi aplicado um teste sobre PA, por meio do qual, buscou-se entender os motivos que levaram os discentes a cometerem determinados erros. Além de classificar os tipos de erros, construiu-se uma distribuição de frequências dos mesmos. Ao término da pesquisa concluiu-se que os erros mais encontrados foram os relacionados ao uso errado dos dados do problema e a erros técnicos, como por exemplo a união de pontos do gráfico com domínio no conjunto dos números naturais

Palavras-chave: Erro. Análise. Progressões Aritméticas.

Introdução

Na busca de solucionar problemas que surgem em sua vida, o ser humano se depara com soluções e fracassos, sendo esses considerados como ‘erros’ que acontecem no processo de se achar respostas para um problema. Na matemática, o erro é geralmente visto como algo a ser evitado e passivo de punição na avaliação acadêmica dos discentes. Entretanto, para Morin (2002, p. 143) “o erro está ligado à vida e, portanto, à morte”, o que nos permite inferir que ao estudá-lo podemos estar próximos também do acerto, desta forma, a análise de um erro cometido pode vir a se tornar fonte de informações para encontrar o que buscamos. Segundo Costa (1988, p.16),

A análise do “erro” nos permite valorizar o processo subjacente às respostas, não apenas a resposta com um produto que se encerra em si mesmo. A análise dos processos utilizados pelas crianças nos leva a verificar o que há de positivo nela, a sua construção lógica, não apenas os seus supostos déficits.

Trabalhando no que foi exposto por Costa (1998), podemos encontrar na análise de erros as principais dificuldades dos discentes na aprendizagem da matemática. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1997), a aprendizagem da matemática está ligada à compreensão, a assimilação do significado. Assimilar o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Para Almeida (2006), quando falamos em dificuldades matemáticas, temos o costume de associar uma “normalidade” a essas dificuldades, afinal a matemática trata-se de uma disciplina “complexa”, com a qual muitos discentes não se identificam. Podemos considerar o erro como fonte de informação e aprendizagem, onde ele se apresenta como uma etapa que deve ser vivenciada pelos discentes, pois é nele que encontramos o percurso que o aluno traçou, o caminho que ele percorreu até chegar a uma determinada resposta, e esses caminhos, esses percursos fazem parte de possibilidades na construção do seu conhecimento. (FELTES, 2007).

Encontrar problemas que envolvam diversos tipos de padrões e sequências numéricas remetem desde a antiguidade sendo que, as sequências numéricas estão relacionadas aos processos de contagem e ao desenvolvimento de sistemas de numeração, estando presente em importantes documentos de civilizações antigas (MILANI, 2011). Na matemática quando falamos de padrões ou sequências

numéricas estamos falando de progressões, uma serie numérica de quantidades, que ocorre de forma sucessiva, uma após a outra. As progressões são divididas em Progressões Aritméticas (PA) e Progressões Geométricas (PG). Nesta pesquisa iremos analisar e classificar os erros cometidos por discentes no ensino de Progressões Aritméticas, após a aplicação de um teste composto por 2 atividades com 8 questões sobre PA.

Progressões Aritméticas

A finalidade da aritmética é estudar as propriedades dos números e as operações que podem ser realizadas com eles. Quando falamos de Progressões Aritméticas (PA), segundo Barreto Filho e Silva (2000), estamos nos referindo a toda sequência de números reais, na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado a uma constante, denominada razão. Essa razão é responsável por definir o tipo da progressão. Quando ela é positiva temos uma progressão aritmética crescente, quando ela é igual a zero temos uma progressão aritmética constante e por fim quando ela for negativa teremos uma progressão aritmética decrescente.

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) apresenta em seu conteúdo que o estudo de Progressões Aritméticas deve ser trabalhado no 1º ano do ensino médio, sendo relacionado com ensino de álgebra, pois o estudo das PA permite que seja explorado junto com as funções afins. (BRASIL, 2018). Em seu trabalho Maia (2012), relata a importância das PA, apresentando exemplos de como ela está presente desde a criação do mundo, através da divisão do tempo em milênios, séculos e anos. As Progressões Aritméticas têm muitas aplicações no nosso cotidiano em áreas da engenharia civil, agricultura, matemática financeira, etc. Além de ser muito utilizada em situações cotidianas da vida.

Metodologia da Pesquisa

Segundo Moreno & Sastre (1983), na aprendizagem, o erro é uma ferramenta necessária na hora de ensinar ao aluno uma nova forma de assimilar e resolver um problema. Desta forma por meio do erro o professor tem a oportunidade de reorganizar o conhecimento dos estudantes e encontrar pontos falhos, permitindo aos discentes uma melhor assimilação do conteúdo. Souza (2002) apresenta em sua pesquisa a importância de se refletir sobre o erro no método avaliativo e, também, sobre seu potencial no processo de reconstrução do conhecimento. A autora ainda apresenta diversos investigadores dessa área, com destaque para Brueckner (apud SOUZA, 1935, p. 68) e Rico (apud SOUZA, 1995, p.68) que dividem a análise de erros em cinco objetivos.

1) listar todas as técnicas errôneas; 2) determinar a distribuição de frequência dessas técnicas de acordo com a idade dos discentes; 3) analisar as dificuldades especiais; 4) determinar a persistência de técnicas errôneas individuais; 5) classificar e agrupar os erros.

No intuito de alcançar os objetivos 1, 3 e 5, utilizou-se a metodologia de análise de conteúdo dos erros de Cury (2007), baseada em Bardin (1979) que consta de três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento de resultados. O segundo objetivo não foi abordado pois a amostra de discentes para a pesquisa possuía em sua grande maioria idades parecidas. O quarto objetivo também não foi abordado por estar relacionado a aspectos individuais dos discentes, não sendo o foco da pesquisa, neste momento.

A presente pesquisa é de caráter qualitativo, onde buscou-se entender os motivos que levam os discentes a cometerem determinados erros, como também possui aspectos quantitativos onde se construiu distribuições de frequências e classificou-se os tipos de erros. A Pesquisa consistiu na aplicação de questionário com questões relativas à PA e posterior análise das respostas dos discentes. Considerando que o PNLD indica que os conteúdos relacionados às PA sejam abordados no 1º ano do ensino médio, para a aplicação do questionário procurou-se uma turma do 2º ano do ensino médio

onde os discentes, em um total de 29 discentes, já tivessem estudado os assuntos relacionados às PA. A aplicação ocorreu no Centro Educacional Professor Rômulo Galvão, do município de Teixeira de Freitas – Bahia.

No intuito de preservar as identidades dos discentes, na pré-análise eles foram identificados como Sujeito 1, Sujeito 2 e assim sucessivamente.

Para análise das respostas dos discentes utilizou-se a proposta de exploração de material presente no trabalho de Brum e Cury (2013), onde as autoras classificam as respostas como corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco. Para análise e categorização dos dados foram utilizadas as respostas incorretas e parcialmente corretas. Na categorização das respostas utilizou-se o modelo de classificação de erros de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) presente no trabalho de Brum e Cury (2013).

Baseado no trabalho das autoras Brum e Cury (2013, p.50-51) e no modelo de classificação de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), os erros foram classificados em:

- I. Ao uso errado dos dados: nesta classe são considerados os erros relacionados com discrepâncias entre os dados do problema e a forma como foram utilizados.
- II. À linguagem mal interpretada: esses erros relacionam-se à tradução incorreta dos itens de uma para outra linguagem, como, por exemplo, passagem da língua natural ou figural para a linguagem matemática;
- III. A erros técnicos;
- IV. Relativa à simples cópia dos dados, quando os discentes transcreveram para o papel os dados, não mostrando a solução proposta.
- V. Erros por distração, quando o estudante resolve corretamente a questão, mas esquece de indicar a resposta ou copia mal os dados.

Assim, como no trabalho das autoras Brum e Cury (2013), para a classificação dos dados foi considerado o primeiro erro cometido na resolução dos problemas, porém na maioria das vezes, o estudante continuou a solução, cometendo erros de outros tipos. Assim, a contagem final leva em conta o fato de que pode haver mais de um tipo de erro em uma mesma questão.

Análise de Erros

A primeira questão do questionário tratou-se de uma sequência numérica adaptada do livro “O diabo dos números” escrito pelo autor alemão Hans Magnus Enzensberger. O objetivo foi de verificar se o aluno era capaz de identificar o que é uma sequência numérica, as suas regularidades e a regra de formação dela. Além de explorar a ideia gráfica da sequência presente na questão. A questão possuía duas letras a e b.

A letra a apresentou o seguinte enunciado: Observe a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, Descubra qual é a regra e escreva mais cinco números desta sequência.

Erro do tipo II foi destaque nesta questão, esse tipo de erro se caracterizou pelo fato dos discentes resolverem corretamente a continuação da sequência, porém não conseguiram descrever de modo correto qual seria a regra dessa sequência numérica. Como exemplo, tem-se a resolução do Sujeito 1, na figura 1, onde ele descreveu a regra para construção da sequência de forma ambígua, sem deixar entender qual número deve ser somado ao anterior para encontrar o próximo termo da sequência.

Observe a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... 21, 34, 55, 89, 144

a) Descubra qual é a regra e escreva mais cinco números desta sequência.

É a soma de um número com o anterior,

Figura 1 – Erro do tipo II, Suj.1.

A letra b apresentou o seguinte enunciado: Tente construir um gráfico para esta sequência. (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13).

Nessa questão o erro do tipo III foi o que mais se destacou. Nele estão contidos os erros onde os discentes ao explorarem a ideia de que as progressões aritméticas/sequências numéricas se tratam de uma função afim com domínio no conjunto dos números naturais, e que, portanto, não poderiam unir os pontos dos gráficos, uniram os pontos. Como exemplo, tem-se a resolução do Sujeito 22, na figura 2.

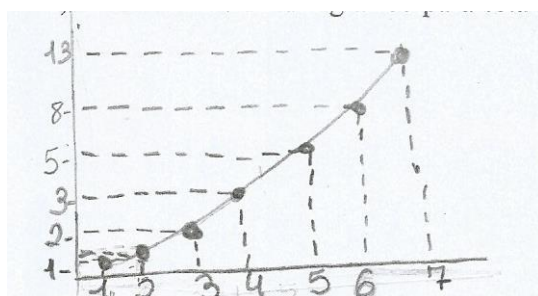
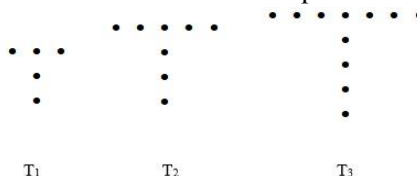


Figura 2 – Erro do tipo III, Suj.22.

Na segunda questão do questionário buscou-se verificar o conhecimento de progressões aritméticas dos discentes, por meio de seis perguntas adaptadas do livro educacional para 8º série de Imenes e Lellis (1997, p.223). As perguntas tinham como objetivo verificar se o aluno era capaz de compreender as regularidades das sequências presentes em uma PA e suas representações, assim como verificar a capacidade deles em conseguir efetuar determinados cálculos através da expressão do termo geral de uma PA. Por fim também foi explorada a ideia de que a progressão aritmética se trata de uma função afim com domínio no conjunto dos números naturais e que, portanto, não podemos unir os pontos dos gráficos. As perguntas foram separadas por letras.

A segunda questão teve como enunciado: Observe a sequência de figuras abaixo:



A letra A teve como enunciado: Desenhe a próxima figura da sequência. Quantas bolinhas ela tem?

Nessa questão o erro do tipo II e do tipo V se relacionaram, pois, a linguagem mal interpretada dos dados acarretaram em erros por distrações dos discentes. Como exemplo, tem-se as resoluções dos Sujeitos 6 e 17, nas figuras 3 e 4.



Figura 3 – Erro do tipo II e tipo V, Suj.6.



Figura 4 – Erro do tipo II e tipo V, Suj.17.

Ambos os discentes acertaram na hora de construir a próxima figura da sequência, porém no momento de passar a figura para a linguagem matemática os dois apresentaram diferentes erros. No caso do discente F, ele informou que haviam 18 bolinhas no T4 sendo que o correto seriam 14. Já o discente Q informou que haviam 9 bolinhas na direção horizontal e 6 na vertical, e efetuou a soma de

ambas as direções, porém ele esqueceu de subtrair 1 a essa soma, pois uma das bolinhas aparecia em ambas as direções e ela precisava ser somada somente uma única vez.

A letra B e C tiveram como enunciado respectivamente o seguinte: Quantas bolinhas terão a 7ª figura? A 16ª figura tem quantas bolinhas?

Ambas as questões apresentaram a mesma quantidade e os mesmo tipos de erros, seis no total de cada uma. Sendo quatro deles caracterizados como o erro do tipo I. Como exemplo, tem-se a resolução da letra B do Sujeito 20, na figura 5.

$$5 + (3 \times 7) = 5 + 21$$

$$26 \text{ Bolinhas}$$

Figura 5 – Erro do tipo I, Suj.20.

Nessa questão o discente tentou encontrar a resposta utilizando a fórmula do termo geral de uma PA, porém o mesmo errou ao multiplicar a razão por n (posição do enésimo termo), sendo que o correto seria subtrair 1 de n antes de multiplicá-lo com a razão. O mesmo erro se repetiu com a letra C.

A letra D teve como enunciado: escreva uma regra para descobrir o número de bolinhas de acordo com a posição que ela ocupa na sequência.

Erro do tipo I nessa questão. Esse tipo de erro apareceu, por exemplo, quando os discentes ao construírem a fórmula do termo geral de uma PA somaram a razão encontrada com o primeiro termo, quando o correto seria definir a_n como $a_1 + (n - 1) \cdot r$. Como exemplo, tem-se a resolução do Sujeito 27, na figura 6. Também foram considerados erros onde os alunos simplesmente apresentaram a razão encontrada como a resposta final da pergunta, como no exemplo da figura 7, que apresenta a resolução do Sujeito 30.

$$a_3 + 3 = a_2$$

$$a_2 + 3 = a_3$$

Figura 6 – Erro do tipo I, Suj.27.

$$R = 3$$

Figura 7 – Erro do tipo I, Suj.30.

A letra E teve como enunciado: a figura que possui 38 bolinhas, ocupa qual posição na sequência?

Nessa questão 13 dos 30 discentes que participaram da pesquisa a deixaram em branco, provavelmente pelo fato dos mesmo não terem conseguido montar corretamente a formula do termo geral de uma PA na questão anterior.

O erro do tipo III, nessa questão, se caracterizou pelo fato de alguns discentes terem montado corretamente a formula do termo geral de uma PA, inserindo todos os dados informados na formula, porém no final para encontrar o n realizaram a divisão incorreta de $\frac{36}{3}$ informando que a figura ocupava a decima terceira posição na sequência, sendo que o correto seria a decima segunda. Como exemplo, tem-se a resolução do Sujeito 16, na figura 8.

$$38 = 5 + (n - 1) \cdot 3$$

$$38 = 5 + 3n - 3$$

$$38 + 3 - 5 = 3n$$

$$3n = 36$$

$$n = \frac{36}{3}$$

$$n = 13$$

Figura 8 – Erro do tipo III, Suj.16.

O erro do tipo IV nessa questão está associado à simples cópia do que estava no enunciado da questão para a resposta da questão. Como exemplo, tem-se a resolução do Sujeito 1, na figura 9.

$$T_n = 88 \text{ bolinhas}$$

Figura 9 – Erro do tipo IV, Suj.1.

A letra F teve como enunciado: construa um gráfico que represente a ordem da figura e a quantidade de bolinhas existentes na figura.

Nessa questão assim como na letra B da questão 1 o erro que mais se destacou foi o do tipo III, onde novamente os discentes ao explorarem a ideia de que as progressões aritméticas/sequências numéricas se tratam de uma função afim com domínio no conjunto dos números naturais, e que, portanto, não poderiam unir os pontos dos gráficos, mas eles uniram os pontos. Como exemplo, tem-se a resolução do Sujeito 18, na figura 10.

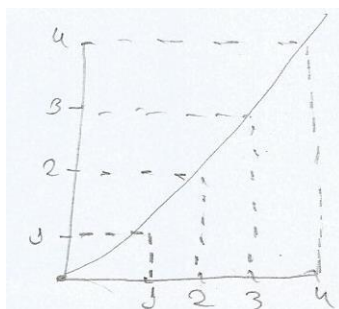


Figura 10 – Erro do tipo III, Suj.18.

A seguir, é apresentado um quadro com o número de erros de cada tipo, em cada letra de cada questão:

Quadro 1 – Número de erros de cada tipo, por letra da questão

Tipos de Erros	Questões								Total
	1		2						
	a	b	a	b	c	d	e	f	
I	0	1	0	4	4	20	0	0	29
II	8	0	11	1	1	2	0	0	23
III	0	17	0	0	0	2	4	15	38
IV	2	0	0	0	0	0	8	0	10
V	2	2	11	1	1	1	0	0	18
Total de Erros	12	20	22	6	6	25	12	15	118

Nesse quadro podemos notar que os erros do tipo I e III são os que aparecem com maiores incidências.

Conclusões

Na presente pesquisa, buscou-se alcançar os objetivos 1, 3 e 5 descritos por Brueckner (apud SOUZA, 1935, p. 68) e Rico (apud SOUZA, 1995, p.68), através da metodologia de Cury (2007), baseada em Bardin (1979).

Com a aplicação dessa metodologia podemos concluir que na análise de erros em progressões aritméticas (PA), os erros do tipo I e tipo III foram os que mais se destacaram entre os discentes. Dessa forma eles foram classificados como as dificuldades especiais dos discentes.

O erro do tipo I referiu-se ao uso errado dos dados e nesta classe são considerados os erros relacionados com discrepâncias entre os dados do problema e a forma como foram utilizados. Os discentes apresentaram dificuldades em entender matematicamente como construir a fórmula do termo geral de uma PA, uma alternativa para contornar essa situação seria trabalhar o ensino de PA através da metodologia de resolução de problemas presente no trabalho de Milani (2011).

O erro do tipo III refere-se a erros técnicos, nesse trabalho ele se apresentou de diversas formas, desde operações básicas realizadas de forma incorreta até construções de gráficos de progressões aritméticas.

Por fim, sugere-se através da aplicação dessa pesquisa que o ensino de PA seja trabalhado utilizando-se novos meios e metodologias educacionais, como o uso de computadores ou resoluções de problemas, e também que ela seja ensinada em articulação com o ensino das funções afim.

Referências

- ALMEIDA, Cíntia Soares de. **Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área**. 2006.
- BARDIN, L. **Análise de erros**. Lisboa: Edições70, 1979.
- BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática aula por aula**. São Paulo, 2000.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos PNLD 2018 - Ensino Médio: Matemática**. Brasília, 2018.
- BRASIL, Ministério da Educação, (1997). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: Matemática**. Brasília, MEC/SEF.
- BRUM, Lauren Darold; CURY, Helena Noronha. Análise de erros em soluções de questões de Álgebra: uma pesquisa com alunos do Ensino Fundamental. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 4, n. 1, p. 45-62, 2013.
- CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com os erros dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- COSTA, Dóris Anita Freire. A análise do Erro como caminho de Descoberta do Pensamento da Criança. **AMAE Educando**. v. 21, n.199, p. 14-20, out. 1988.
- ENZENSBERGER, Hans Magnus. **O diabo dos números**. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.
- FELTES, Rejane Zeferino. **Análise de erros em potenciação e radiciação: um estudo com alunos de ensino fundamental e médio**. 2007. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.
- IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática: 8ª série**. São Paulo: Scipione, 1997.
- MAIA, Rodolfo José Diniz. **Progressões aritméticas e geométricas**. 2012.
- MILANI, Wilton Natal. **A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio**. 2011.
- MORENO, M & SASTRE, G. **Aprendizaje V desarrollo intelectual**. México: Gedisa, 1983
- MORIN, Edgar. **Ciência com Consciência**. 6. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2002.
- MOVSHOVITZ-HADAR, N.; ZASLAVSKY, O.; INBAR, S. An empirical classification model for errors in high school mathematics. **Journal for Research in athematics Education**, v. 18, n. 1, p. 3-14, 1987.
- SOUZA, S. **Erros em Matemática: um estudo diagnóstico com alunos de 6ª série do Ensino Fundamental**. 2002. Tese de Doutorado. Dissertação de Pós-Graduação, Universidade Estadual Paulista.

Linguagem de Programação Ox: Uma Aplicação em Problemas de Otimização

Luiz Victor Lima Macêdo

*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
victor.mat.ifba@gmail.com*

Marcelo dos Santos

*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
marcelo.santos@ifba.edu.br*

Resumo: Em diversas situações do cotidiano e das ciências pode-se perceber a importância da otimização, tendo em vista que seu objetivo é tornar ideal um procedimento, uma técnica, isto é, extrair seu melhor rendimento. No contexto matemático das funções, otimizar significa encontrar pontos de máximo (ou mínimo) com o objetivo de determinar quais são os valores que maximizam (ou minimizam) uma função. No entanto, muitas das vezes, a tarefa de determiná-los analiticamente pode se tornar complicada, e deste modo, tem-se a possibilidade de utilizar softwares computacionais para determinar e analisar soluções. Neste trabalho, utilizamos a linguagem de programação Ox para determinar pontos de máximo de funções associadas a situações-problemas da literatura, de modo a verificar sua eficácia. Como resultado, obtivemos que a linguagem é capaz de determinar pontos de máximo de funções matemáticas com precisão (e até mesmo certeza).

Palavras-chave: Otimização. Programação. Ox. OxEdit.

Introdução

Em conformidade com o Dicionário online AULETE (2014), otimizar significa tornar ótimo ou ideal, extrair o melhor rendimento possível no que concerne a qualquer área de conhecimento. Neste sentido, e no âmbito das definições matemáticas, o processo de otimizar significa estudar problemas que busquem minimizar ou maximizar uma função, que muitas das vezes modela uma situação real, através da escolha de variáveis dentro de um espaço amostral. Problemas deste tipo estão presentes em diversas áreas do conhecimento, bem como em situações cotidianas, por exemplo, na maximização do lucro em função dos custos e das quantidades produzidas de um produto.

Em algumas situações, determinar pontos de máximo de uma função analiticamente pode se tornar trabalho complicado, e assim, surge a possibilidade de utilizar softwares computacionais que permitam determinar valores aproximados. Diante disto, o presente trabalho tem como objetivo verificar a eficácia da linguagem de programação Ox no processo de maximização de funções matemáticas.

Maximização de Funções de Duas Variáveis

As definições apresentadas neste trabalho estão de acordo com as apresentadas em GUIDORIZZI (2013).

Definição 1: Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis. Dizemos que $(x_0, y_0) \in D(f)$ é ponto de máximo absoluto ou global de f se: $\forall (x, y) \in D(f) \Rightarrow f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$. Neste caso, $f(x_0, y_0)$ é o valor máximo de f .

Exemplo 1: O ponto $(0,0)$ é um ponto de máximo absoluto ou global de f , pois

$$\forall (x, y) \in D(f) \Rightarrow 4 - x^2 - y^2 \leq 4 = f(0,0).$$

Logo, o valor máximo de $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ é $f(0,0) = 4$.

Definição 2: Dizemos que $z = f(x, y)$ admite um máximo local no ponto (x_0, y_0) se existe um disco aberto R contendo (x_0, y_0) tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in R$.

Exemplo 2: A função $f(x, y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$ admite um máximo local no ponto $(0,0)$. De fato, $f(0,0) = \frac{1}{2}$. Observe que

$$\frac{1}{2} = \sin(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

Escolha um ponto (x, y) na vizinha de $(0,0)$ interior ao círculo de raio $r = \frac{\sqrt{\pi}}{6}$. Deste modo,

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{6}. \quad (2)$$

Logo,

$$\sin(x^2 + y^2) \geq 0 \quad (3)$$

e assim,

$$f(x, y) = 1 - \sin(x^2 + y^2) \leq \frac{1}{2} = f(0,0). \quad (4)$$

Portanto, $(0,0)$ é um ponto de máximo.

Teorema 1: Se a função $f(x, y)$ admite um máximo para os valores de $x = x_0$ e $y = y_0$, então as derivadas parciais de primeira ordem de z nestes valores anulam-se, *i. e.*,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad (5)$$

Demonstração: Suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto de máximo local de f . Como $(x_0, y_0) \in D(f)$, existe uma bola aberta $B \subset D(f)$ de centro em (x_0, y_0) tal que $\forall (x, y) \in B$

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0). \quad (6)$$

Assim, existe um intervalo I , com $x_0 \in I$ tal que $\forall x \in I, (x, y_0) \in B$. Consideremos a função g dada por

$$g(x) = f(x, y_0), x \in I.$$

Temos então que g é derivável em x_0 , x_0 é ponto interior de I e ponto máximo local de g . Daí, $g'(x_0) = 0$, e portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0. \quad (7)$$

De modo análogo, demonstra-se que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Definição 3: Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável em num conjunto aberto. Um ponto (x_0, y_0) deste conjunto em que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ é denominado ponto crítico.

Observação 1: Os pontos de máximo de uma função $z = f(x, y)$ estão entre seus pontos críticos. No entanto, nem todo ponto crítico é um ponto de máximo, *i.e.*, estes podem ser pontos de mínimo ou de sela. Para maiores detalhes, veja (GUIDORIZZI, 2013).

Cabe ressaltar que o Teorema 1 nos fornece apenas uma condição necessária para que um ponto (x_0, y_0) seja ponto de máximo. Uma condição suficiente será dada no teorema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em (GUIDORRIZI, 2013).

Antes de enunciarmos o teorema, definamos a função $H(x, y)$, denominada *hessiano* de f .

Definição 4: Seja $f(x, y)$ de classe C^2 , a função H dada por

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right]^2 \quad (8)$$

denomina-se *hessiano* de f . Note que

$$H(x, y) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Teorema 2: Seja $z = f(x, y)$ uma função de classe C^2 num conjunto aberto B que contém (x_0, y_0) . Suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto crítico de f . Então, se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de máximo local de f .

Para os demais casos, veja (GUIDORIZZI, 2013).

Linguagem de Programação Ox

Ox é uma linguagem de programação matricial orientada a objetos com uma extensa biblioteca de funções matemáticas e estatísticas. Possui duas versões: Console e Professional, a primeira livre para uso acadêmico. *OxEdit* é um editor de textos com opções úteis para

programação em Ox. Suas principais características são: coloração usada para distinguir comandos, constantes, comentários e identificação de erros; roda programas do Ox facilmente e exibe numa nova janela denominada *Ox Output*. Na Figura 1 pode-se ver a janela do *OxEdit* com a estrutura dos códigos utilizados neste trabalho.

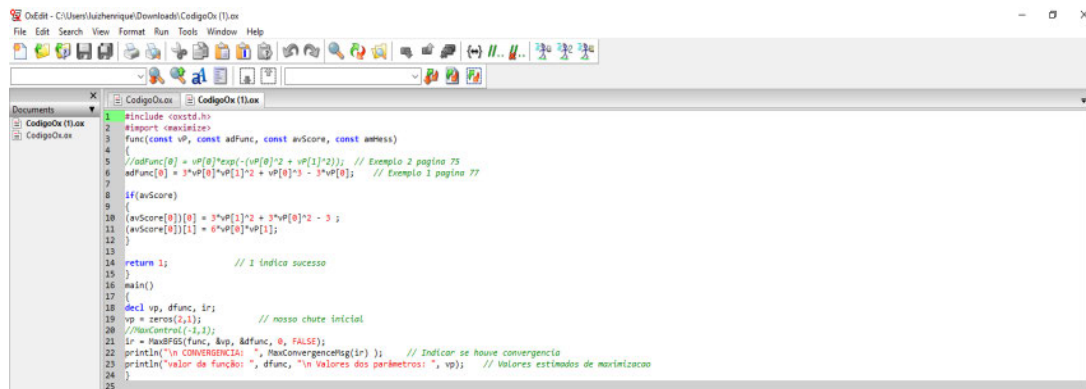


Figura 1 - Janela do OxEdit

Em relação às maximizações, o *OxEdit* possui ferramentas de maximização de funções matemáticas, a saber: MaxBFGS, MaxNewton, MaxSimplex, MaxSQP, MaxSQPF. Neste trabalho, faremos uso do método BFGS. Maiores detalhes sobre as demais, basta conferir o menu de ajuda do *OxEdit*. O método BFGS faz uso de quatro argumentos: *const vP*, *const adFunc*, *const avScore* e *amHess* (aqui ignorado), em que *vP* representa um vetor de parâmetros no qual a função é avaliada; *adFunc* representa o endereço da variável na entrada, e na saída, obtemos o valor da função nos parâmetros; *avScore* mantém 0 na entrada ou no endereço da variável, sendo 0, as primeiras derivadas da função são armazenadas no endereço; *func* retorna o valor 1 se a verificação for bem sucedida e 0 se falhar em avaliar a função nos valores dos parâmetros fornecidos.

A versão utilizada para implementar e realizar as simulações foi Ox Console version 7.20 (Windows/U) (C) J.A. Doornik, 1994-2017, desenvolvida por DOORNIK (2006), disponível em www.doornik.com.

Aplicação da Linguagem Ox em Problemas de Otimização

Para verificar a eficácia da linguagem Ox, selecionamos três problemas contidos na literatura (GUIDORRIZI, 2013; HOFFMAN & BRADLEY, 2010; LARSON & EDWARDS, 2005) e comparamos as soluções exatas e aproximadas conhecidas com as fornecidas pela linguagem. Os problemas estão descritos abaixo e, por conveniência, a resolução será omitida.

Problema 1: Para produzir determinado produto cuja quantidade é representada por z , uma empresa utiliza dois fatores de produção (insumos) cujas quantidades serão indicadas por x e y . Os preços unitários dos fatores de produção são, respectivamente, 2 e 1. O produto será oferecido ao mercado consumidor a um preço unitário igual a 5. A função de produção da empresa é dada por $z = 900 - x^2 - y^2 + 32x + 41y$. Determine a produção que maximiza o lucro.

Para resolver o problema, a lei da função que se deve maximizar é

$$L(x, y) = 4500 - 5x^2 - 5y^2 + 158x + 204y.$$

Utilizando o método BFGS o código utilizado para o problema 1 pode ser visto na Figura 2 a seguir.

```

3 func(const vp, const adFunc, const avScore, const amHess)
4 {
5     adFunc[0] = 4500 - 5*vp[0]^2 - 5*vp[1]^2 + 158*vp[0] + 204*vp[1]; // LEI DA FUNÇÃO A SER MAXIMIZADA
6     return 1; // 1 INDICA SUCESSO
7 }
8
9 main()
10 {
11     decl vp, dfunc, ir;
12     vp = zeros(2,1); // FUNÇÃO ZERO: MATRIZ DE 2 LINHAS E UMA COLUNA, UTILIZADA PARA ARMazenar DADOS
13     //MaxControl(-1,1);
14     ir = MaxBFGS(func, &vp, &dfunc, 0, TRUE);
15     println("\n CONVERGENCIA: ", MaxConvergenceMsg(ir)); // INDICA CONVERGÊNCIA OU NÃO
16     println("valor da função: ", dfunc, "\n Valores dos parâmetros: ", vp); // APRESENTA VALORES ESTIMADOS OU NÃO DA MAXIMIZAÇÃO
17 }

```

Figura 2 - Código de maximização para função do problema 1.

Na Figura 3 pode-se ver a resposta do programa.

```

Ox Console version 7.20 (Windows/U) (C) J.A. Doornik, 1994-2017
This version may be used for academic research and teaching only

CONVERGENCIA: Strong convergence
valor da função: 7829
Valores dos parâmetros:
    15.800
    20.400

```

Figura 3 - Pontos de máximo da função do problema 1 dado pelo OxEdit.

Assim, o programa indicou convergência forte e o ponto de máximo da função é $A = (15.8, 20.4)$, cujo valor é exatamente o mesmo encontrado na literatura.

Problema 2: Uma empresa produz um artigo em duas fábricas. As funções custo para produzir x unidades na fábrica 1 e y na fábrica 2 unidades são, respectivamente $C_x = 0,05x^2 + 15x + 5400$ e $C_y = 0,03y^2 + 15y + 6100$. A função demanda do produto é dada por $p = 225 - 0,4(x + y)$, portanto, a receita total é $R = [225 - 0,4(x + y)](x + y)$. Determine os níveis de produção nas duas fábricas que maximizam o lucro $L = R - C_x - C_y$.

Neste problema, a lei da função que se deve maximizar é:

$$L(x, y) = 210x + 210y - 0,4(x + y)^2 - 0,05x^2 - 0,03y^2 - 1150 \quad (11)$$

Utilizando o método BFGS, o código utilizado para o problema 2 pode ser visto na Figura 4 a seguir.

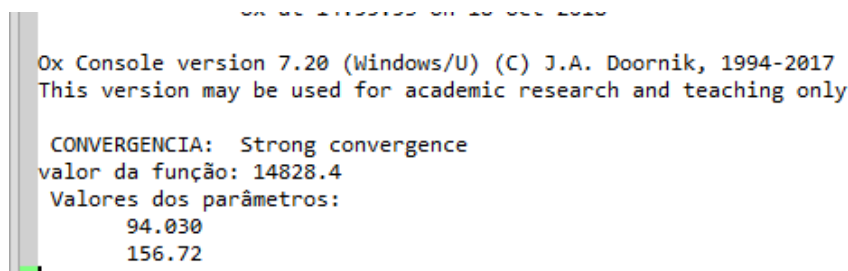
```

1 #include <oxstd.h>
2 #import <maximize>
3 func(const vp, const adFunc, const avScore, const amHess)
4 {
5     adFunc[0] = 210*vp[0] + 210*vp[1] - (0.4)*(vp[0] + vp[1])^2 - (0.05)*(vp[0]^2) - (0.03)*(vp[1]^2) - 1150; // LEI DA FUNÇÃO A SER MAXIMIZADA
6     return 1; // 1 INDICA SUCESSO
7 }
8
9 main()
10 {
11     decl vp, dfunc, ir;
12     vp = zeros(2,1); // FUNÇÃO ZERO: MATRIZ DE 2 LINHAS E UMA COLUNA, UTILIZADA PARA ARMazenar DADOS
13     //MaxControl(-1,1);
14     ir = MaxBFGS(func, &vp, &dfunc, 0, TRUE);
15     println("\n CONVERGENCIA: ", MaxConvergenceMsg(ir)); // INDICA CONVERGÊNCIA OU NÃO
16     println("valor da função: ", dfunc, "\n Valores dos parâmetros: ", vp); // APRESENTA VALORES ESTIMADOS OU NÃO DA MAXIMIZAÇÃO
17 }

```

Figura 4 - Código de maximização para função do problema 2.

Como pode ser visto na Figura 5 abaixo, o programa indicou convergência forte e como ponto de máximo obteve $B = (94,03; 156,72)$, cujos valores são os mesmos encontrados na literatura.



```
Ox Console version 7.20 (Windows/U) (C) J.A. Doornik, 1994-2017
This version may be used for academic research and teaching only

CONVERGENCIA: Strong convergence
valor da função: 14828.4
Valores dos parâmetros:
    94.030
    156.72
```

Figura 5 - Ponto de máximo da função do problema 2 dado pelo OxEdit.

Apesar de o método BFGS ser utilizado na maximização de funções, podemos também usa-lo em problemas de minimização. Para tanto, basta multiplicarmos a função por (-1) , maximiza-la e, ao final, multiplicarmos o valor obtido também por (-1) . Vejamos uma aplicação disto no problema a seguir.

Problema 3: A medida que uma corrente elétrica circula através de um fio, o calor gerado pela resistência é conduzido através de uma camada de isolamento e então transferido para o ar circundante, essencialmente, por convecção. A temperatura do regime permanente do fio pode ser calculada como

$$T = T_{ar} + \frac{q}{2\pi} \left[\frac{1}{k} \cdot \ln \left(\frac{r_w + r_i}{r_w} \right) + \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{(r_w + r_i)} \right] \quad (12)$$

Determine a espessura de isolamento r_i (m) que minimiza a temperatura do fio dados os seguintes parâmetros: q = taxa de geração do calor = 75 W/m , r_w = raio do fio = 6 mm , k = condutividade térmica do isolamento = $0,17 \text{ W/(mK)}$, h = coeficiente de transferência de calor por convecção = $12 \text{ W/m}^2\text{K}$ e temperatura do ar $T_{ar} = 293 \text{ K}$.

Neste problema, a lei da função que se deve minimizar é:

$$T = 293 + \frac{75}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{0,17} \cdot \ln \left(\frac{0,006 + r_i}{0,006} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{0,006 + r_i} \right) \right] \quad (13)$$

Utilizando o método BFGS, o código utilizado para o Problema 3 pode ser visto na Figura 6 a seguir.

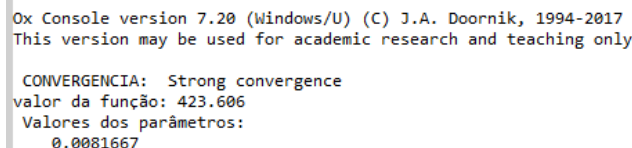
```
func(const vp, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    //adFunc[0] = vp[0]*exp(-(vp[0]^2 + vp[1]^2)); // Exemplo 2 pagina 75
    //adFunc[0] = 4*(120*vp[0] - 23*vp[0]^2 + vp[0]^3); // Exemplo 1 pagina 77
    adFunc[0] = -( 293 + (75/(2*3.14))*( (1/0.17)*log((0.006 + vp[0])/0.006) + (1/12)*(1/(0.006 + vp[0]))));

    //if(avScore)
    //{
        //((avScore[0])[0] = (75/(2*3.14))*((1/0.17)*(0.006/(0.006 + vp[0])) - 1/(12*(0.006 + vp[0])^2) ) ;
        //((avScore[0])[1] = 6*vp[0]*vp[1];
    //}

    return 1; // 1 indica sucesso
}
main()
{
    decl vp, dfunc, ir;
    vp = zeros(1,1); // nosso chute inicial
    //MaxControl(-1,1);
    ir = MaxBFGS(func, &vp, &dfunc, 0, TRUE);
    println("\n CONVERGENCIA: ", MaxConvergenceMsg(ir) ); // Indicar se houve convergencia
    println("valor da função: ", (-1)*dfunc, "\n Valores dos parâmetros: ", vp); // Valores estimados de maximizacao
}
```

Figura 6: Código de maximização para função do problema 3.

Como pode ser visto na Figura 7, o código utilizado indicou convergência forte e o ponto de mínimo é dado quando $r_i = 0.0081667$, cujo valor é o mesmo encontrado na literatura.



```
Ox Console version 7.20 (Windows/U) (C) J.A. Doornik, 1994-2017
This version may be used for academic research and teaching only

CONVERGENCIA: Strong convergence
valor da função: 423.606
Valores dos parâmetros:
    0.0081667
```

Figura 7: Ponto de mínimo da função do problema 3 dado pelo OxEdit.

Conclusões

Embasado nos resultados obtidos podemos afirmar que a linguagem de programação Ox é uma excelente alternativa para resolução de problemas de otimização no contexto de suas aplicações nas diversas áreas do conhecimento.

Pretendemos em trabalhos futuros avaliar o desempenho dos métodos numéricos implementados na linguagem na resolução de problemas mais complexos, bem como explorar sua parte gráfica e estatística.

Referências

- AULETE, DICIONÁRIO; VALENTE, AL dos S. Dicionário online Caldas Aulete. **Aulete Digital**. Disponível em <http://www.aulete.com.br/>. Acesso em 04 de outubro de 2018, v. 9, 2014.
- CHAPRA, Steven C. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para Engenheiros e Cientistas-3**. AMGH Editora, 2013.
- DOORNIK, J. **Object-oriented matrix programming using ox 5th edition**. London: Timberlake consultants ltd. See <http://www.nuff.ox.ac.uk/Users/Doornik>, 2006.
- GUIDORRIZI, Hamilton. **Um Curso de Cálculo Volume 2**. 5ª ed. Rio de Janeiro: ETC, 2013.
- HOFFMAN, Laurence. BRADLEY, Gerald. **Cálculo: Um Curso Moderno e Suas Aplicações**. Trad: Ronaldo Sérgio Biasi. 10ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- LARSON, Ron. EDWARDS, Bruce. **Cálculo com Aplicações**. Trad: Ronaldo Sérgio Biasi. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

Decomposição Natural de Helmholtz-Hodge

José Eduardo Cordeiro

*Universidade Federal do Espírito Santo - UFES
eduardocordeiro1@gmail.com*

Fabiano Petronetto do Carmo

*Universidade Federal do Espírito Santo - UFES
fabiano.carmo@ufes.br*

Enéas Mendes de Jesus

*Instituto Federal do Espírito Santo - IFES
eneas.jesus@ifes.edu.br*

Resumo: Decomposição de campos vetoriais tem se tornado atrativo, pois possibilita inferir informações do campo a partir de uma análise sobre suas componentes. Em particular, a decomposição de Helmholtz-Hodge permite escrever um campo vetorial de maneira única como uma soma de três campos vetoriais: irrotacional, solenoidal e harmônico. Quando o domínio em questão é limitado, faz-se necessário o uso de condições de fronteira para a obtenção da unicidade, contudo algumas aplicações definem campos com condições de contorno complexas ou até mesmo desconhecidas. Este trabalho aborda um método que despreza as condições de fronteira, a Decomposição Natural de Helmholtz-Hodge que é a obtenção da Decomposição de Helmholtz-Hodge sem imposições de condições de fronteira para garantir a unicidade da decomposição.

Palavras-chave: Campos Vetoriais. Decomposições. Condições de Fronteira. Feições Características.

Introdução

Campos vetoriais estão presentes em muitas áreas de pesquisas como por exemplo física, engenharia e oceanografia (ARFKEN; WEBER, 2005) (WARE et al, 2009). A Decomposição de Helmholtz-Hodge (em inglês, Helmholtz-Hodge Decomposition, HHD) é uma ferramenta valiosa para a análise de campos vetoriais, uma vez que ela decompõe um campo vetorial em outras três componentes vetoriais, sendo uma irrotacional (rotacional nulo), uma solenoidal (divergente nulo) e uma harmônica (laplaciano nulo), permitindo assim uma análise do campo vetorial a partir de cada componente (HELGELAND et al, 2007) (HELMAN; HESSELINK, 1989). Diante disso muitos consideram essa decomposição como um dos resultados fundamentais em dinâmica dos fluidos.

Como já citado, algumas características dos fluxos podem ser exploradas pela HHD. Singularidades como vórtices, fontes e sorvedouros estão entre as principais feições características dos campos vetoriais (PETRONETTO, 2008) (POLTHIER; PREUSS, 2003). Tais feições determinam algum comportamento físico e permitem uma caracterização topológica do fluxo.

Devido a maioria dos problemas abordarem domínios limitados, diferentes condições de fronteiras podem ser utilizadas com o objetivo de obter a unicidade na decomposição, logo os impactos da imposição de tais condições devem ser estudados. E mais, algumas aplicações definem campos com condições de contorno complexas ou até mesmo desconhecidas durante a análise de tais campos, como por exemplo, a exigência que os valores na fronteira correspondam ao valor da derivada da função - ainda desconhecida.

Para o caso de campos bidimensionais observa-se uma falha na decomposição (WIEBEL, 2004), onde para singularidades próximas ou sobre a fronteira do domínio, a estrutura das componentes podem ter mudanças significativas, comprometendo a análise do campo. Bhatia e outros atribuem a inconsistência na análise à imposição das condições de fronteira (BHATIA, 2014). Logo faz-se necessário o

uso de métodos na tentativa de corrigir tais erros. O método proposto por Bhatia utiliza as funções de Green para espaços infinitos, desprezando assim as condições de fronteira.

O presente trabalho exhibe alguns métodos de decomposição, dentre eles a chamada *Decomposição Natural de Helmholtz-Hodge*, onde a decomposição do campo é obtida sem a necessidade de impor condições de fronteira. Os resultados obtidos demonstram que o método obtém decomposições matematicamente consistentes e computacionalmente eficientes.

Decomposições de Campos Vetoriais

Na literatura há variação dos nomes para uma mesma decomposição, basicamente a combinação dos nomes Helmholtz e Hodge, todas com a mesma essência, decompor um campo vetorial em outros campos com determinadas propriedades. Começemos com dois teoremas¹ que usam o mesmo nome porém de certo sentido um é inverso do outro.

Teorema 1 (Decomposição de Helmholtz). *Dado $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial suave que se anula no infinito, podemos escrevê-lo de maneira única como a soma de um campo irrotacional com um campo solenoidal, ou seja,*

$$\mathbf{v} = \nabla \phi + \nabla \times \Psi.$$

onde ϕ e Ψ são dados explicitamente através de $\mathbf{v}$.

Teorema 2 (Decomposição de Helmholtz). *Seja $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial suave potencialmente desconhecido. Se são dados $\nabla \cdot \mathbf{v}$ e $\nabla \times \mathbf{v}$ e ambos possuem a propriedade de se anularem no infinito, então $\mathbf{v}$ pode ser escrito de maneira única como a soma de um campo irrotacional com um campo solenoidal, ou seja,*

$$\mathbf{v} = \nabla \phi + \nabla \times \Psi.$$

onde ϕ e Ψ são dados explicitamente através de $\nabla \cdot \mathbf{v}$ e $\nabla \times \mathbf{v}$ respectivamente.

Note que o domínio do campo tanto no Teorema 1 quanto no Teorema 2 é todo o plano. Para o caso em que o domínio do campo vetorial é um aberto, simplesmente conexo e limitado temos o Teorema 3.

Teorema 3 (Decomposição de Helmholtz-Hodge). *Dado um campo vetorial $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ suave, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é aberto, simplesmente conexo e limitado. Então $\mathbf{v}$ pode ser escrito como a soma de um campo vetorial irrotacional $\mathbf{d}$, um solenoidal $\mathbf{r}$ e um harmônico $\mathbf{h}$*

$$\mathbf{v} = \mathbf{d} + \mathbf{r} + \mathbf{h}.$$

Para obter a expressão das componentes do Teorema 3 necessitamos de uma definição particular introduzida por (POLTHIER; PREUSS, 2003). Seja J o operador sobre campos vetoriais que rotaciona todos os vetores em 90 graus no sentido horário

$$J(\mathbf{v}) = J(v_1, v_2) = (v_2, -v_1). \quad (1)$$

Assim o Teorema 3 é dado por

$$\mathbf{v} = \nabla \phi + J(\nabla \psi) + \mathbf{h}. \quad (2)$$

Para conhecermos os campos potenciais na Equação 2 definimos, para o espaço bidimensional, o operador rotacional como uma função de valor real

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (v_1, v_2) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \quad (3)$$

¹ Ambos teoremas podem ser encontrados em (GRIFFITHS, 1999) e (ZANGWILL, 2012).

onde $v_i = v_i(x, y)$. Observa-se que pela definição da função J o rotacional 2D é dado por

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \cdot J(\mathbf{v})$$

e portanto as seguintes propriedades são satisfeitas

1. A componente $\mathbf{d} = \nabla \varphi$ é irrotacional, $\nabla \cdot J(\mathbf{d}) = 0$.
2. A componente $\mathbf{r} = J(\nabla \psi)$ é solenoidal, $\nabla \cdot \mathbf{r} = 0$.
3. A componente $\mathbf{h}$ é harmônica, $\nabla \cdot \mathbf{h} = \nabla \cdot J(\mathbf{h}) = 0$.

Através dessas propriedades e da Equação 2 obtemos duas equações de Poisson

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \Delta \varphi \\ \nabla \cdot J(\mathbf{v}) &= -\Delta \psi \end{cases} \quad (4)$$

onde os potenciais φ e ψ são as soluções de cada uma das equações. Desta maneira obtemos as componentes irrotacional e solenoidal da decomposição, já a componente harmônica é calculada pela diferença $\mathbf{h} = \mathbf{v} - \mathbf{d} - \mathbf{r}$.

Sejam $\mathbf{v}$ um campo vetorial e $\mathbf{v} = \mathbf{d} + \mathbf{r} + \mathbf{h}$ uma decomposição para $\mathbf{v}$. Dados quaisquer campos harmônicos $\mathbf{h}_d$ e $\mathbf{h}_r$, temos que

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{d}} + \tilde{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{h}}$$

é uma decomposição válida para o mesmo campo $\mathbf{v}$, onde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{d}} &= \mathbf{d} + \mathbf{h}_d \\ \tilde{\mathbf{r}} &= \mathbf{r} + \mathbf{h}_r \\ \tilde{\mathbf{h}} &= \mathbf{h} - \mathbf{h}_d - \mathbf{h}_r. \end{aligned}$$

Portanto, até o momento, não é garantida a unicidade da decomposição. Logo faz-se necessário a imposição de condições em algum momento da decomposição.

Condições de Contorno

Para alcançar a unicidade da decomposição, basta obter os potenciais φ e ψ de maneira única, adicionando condições de contorno sobre as Equações 4.

Mencionaremos duas das mais utilizadas condições de fronteira, ambas impõe que as componentes $\mathbf{d}$ e $\mathbf{r}$ sejam ortogonais na fronteira. Adotando a notação $\mathbf{n}$ para o vetor normal apontando para fora do domínio, temos a primeira condição, *Normal-Paralelo* (NP)

$$\begin{cases} \nabla \varphi \times \mathbf{n} &= 0 \\ J(\nabla \psi) \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{cases} \quad (5)$$

impondo que a componente irrotacional seja normal à fronteira e a componente solenoidal seja paralela à fronteira. A segunda condição é a *Paralelo-Normal* (PN)

$$\begin{cases} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \nabla \psi \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{cases} \quad (6)$$

impondo que a componente irrotacional seja paralela à fronteira e a componente solenoidal seja normal à fronteira.

A imposição de condição de fronteira pode retornar problemas, por exemplo, componentes que não sejam compatíveis com o campo dado. Durante experimentos (WIEBEL, 2004) atestou que a Decomposição de Helmholtz-Hodge 2D com imposição de condição de fronteira tem problemas quando, por exemplo, o campo possui um vórtice próximo ou sobre a fronteira, vide Figura 1. Portanto a imposição de condições de fronteira pode não ser uma boa alternativa para obter a unicidade da decomposição, o que motiva a seção seguinte.

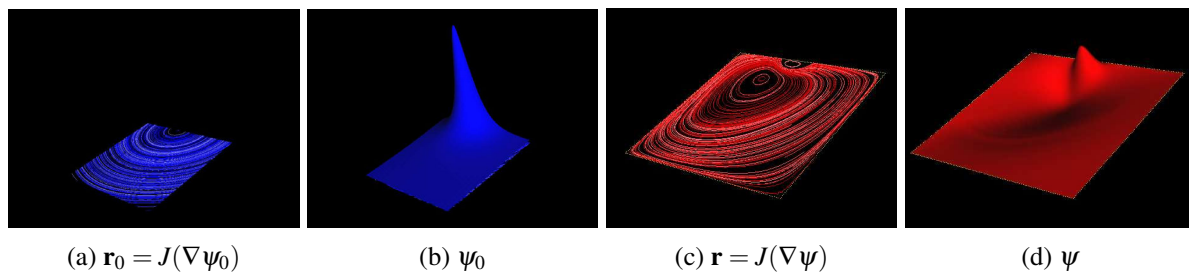


Figura 1: Exemplo dado por (WIEBEL, 2004) expondo um problema gerado pela decomposição 2D. Onde o índice 0 corresponde ao campo analítico e $\mathbf{r}$ é a componente advinda da decomposição.

Decomposição Natural

Como em equações de Poisson ($\Delta u = f$) o harmônico está associado a condições de fronteira, pois exigimos tais condições na tentativa de obter a unicidade (se u é solução, $u + H$ com $\Delta H = 0$, também é solução), logo a razão fundamental para que a **HHD** não seja única é o campo harmônico, que é tanto irrotacional quanto solenoidal.

Como os problemas de Poisson são abordados diante de um domínio aberto, temos que a fronteira é externa ao domínio, logo determinar um campo harmônico é equivalente a conhecer informações fora do domínio. Através disso, (BHATIA, 2014) argumenta que qualquer campo não-harmônico pode ser compreendido por informações disponíveis dentro do domínio. Portanto, um campo harmônico é indiretamente identificado como o campo que não pode ser compreendido por informações de dentro do domínio.

Através dessa interpretação indireta de campo harmônico, Bhatia encontrou uma maneira de realizar a **HHD** para um campo sobre um domínio limitado sem a imposição de condições de fronteira eliminando assim os possíveis erros encontrados por Wiebel. Para isso foi dada a definição

Definição 1 (A Decomposição Natural). *A Decomposição Natural de Helmholtz-Hodge de um campo vetorial $\mathbf{v}$ suave, $\mathbf{HHD}^* : \mathbf{v} = \mathbf{d}^* + \mathbf{r}^* + \mathbf{h}^*$, é obtida separando os campos por influência interna e externa referentes a um domínio. As componentes divergente natural ($\mathbf{d}^*$) e rotacional natural ($\mathbf{r}^*$) representam campos influenciados por divergências e rotações de $\mathbf{v}$ dentro do domínio. Consequentemente a componente harmônico natural ($\mathbf{h}^*$) é o campo influenciado apenas pelo exterior (fronteira) do domínio.*

Teorema 4 (Decomposição Natural de Helmholtz-Hodge). *Seja um campo vetorial $\mathbf{v}$ suave sobre um domínio limitado, aberto e simplesmente conexo Ω . A Decomposição Natural de Helmholtz-Hodge de $\mathbf{v}$ existe e é única, e mais, as componentes podem ser escritas por $\mathbf{d}^* = \nabla\phi^*$, $\mathbf{r}^* = J(\nabla\psi^*)$ e $\mathbf{h}^* = \mathbf{v} - \mathbf{d}^* - \mathbf{r}^*$. Portanto*

$$\mathbf{v} = \nabla\phi^* + J(\nabla\psi^*) + \mathbf{h}^*. \quad (7)$$

Para encontrar a expressão para os potenciais escalares da Equação 7, Bhatia usou as funções de Green para espaços infinitos as quais são bem discutidas em (EVANS, 2002).

Definição 2. *A função de Green para espaços infinitos bidimensional é dada por*

$$G_\infty(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x}\|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \quad (8)$$

Demonstração. Considere uma extensão suave $\tilde{\mathbf{v}}$ de $\mathbf{v}$ para todo o plano satisfazendo o Teorema de Helmholtz (Teo. 1), que para o caso bidimensional é

$$\tilde{\mathbf{v}} = \nabla\phi + J(\nabla\psi). \quad (9)$$

De maneira análoga ao que fizemos na Equação 2 para encontrar a Equação 4 obtemos

$$\begin{cases} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} &= \Delta\phi \\ \nabla \cdot J(\tilde{\mathbf{v}}) &= -\Delta\psi \end{cases} \quad (10)$$

cuas soluções são dadas de maneira única por

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G_{\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega} G_{\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ \psi(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega} G_{\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla \cdot J(\mathbf{v}(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' - \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega} G_{\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla \cdot J(\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}'\end{aligned}$$

onde as integrais $\int_{\Omega}(\dots)$ e $\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega}(\dots)$ representam a influência interna e externa com respeito à Ω respectivamente. E pela definição, os potenciais naturais representam apenas a influência interna, portanto os potenciais naturais da Equação 7 são

$$\begin{aligned}\varphi^*(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G_{\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' & \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Omega \\ \psi^*(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega} G_{\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla \cdot J(\mathbf{v}(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' & \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Omega\end{aligned}\tag{11}$$

e a componente harmônica é dada por $\mathbf{h}^* = \mathbf{v} - \mathbf{d}^* - \mathbf{r}^*$. ■

Resultados

Para realizar a decomposição natural, ilustrada na Figura 2, utilizamos o Método de Diferenças Finitas (MDF) para obter o gradiente e o divergente de uma função e o método dos trapézios para obter a integral. O MDF é um método de aproximação de derivadas, obtida através da série de Taylor da função (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013). Já o método dos trapézios é um método de integração numérica, que aproxima o valor em cada região pela área de um trapézio (CAMPOS, 2007).

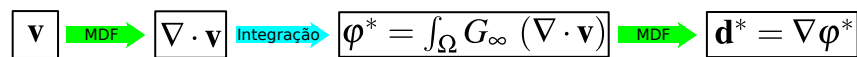


Figura 2: Principais etapas para a obtenção da componente irrotacional da decomposição natural.

Para análise, criamos primeiro as componentes irrotacional ($\mathbf{d}$), solenoidal ($\mathbf{r}$) e harmônica ($\mathbf{h}$) dados por uma expressão analítica e daí somamos e obtemos o campo $\mathbf{v}$ para realizarmos a decomposição.

Exemplo 1. Consideremos para esse exemplo um campo vetorial com dois vórtices de rotações contrárias, uma fonte e um sorvedouro sobre os pontos $(\pm 1, \pm 1)$ cujo domínio é $[-3, 3] \times [-3, 3]$, a Figura 3 exibe o campo, as componentes analíticas em miniatura e a decomposição natural obtida do campo.

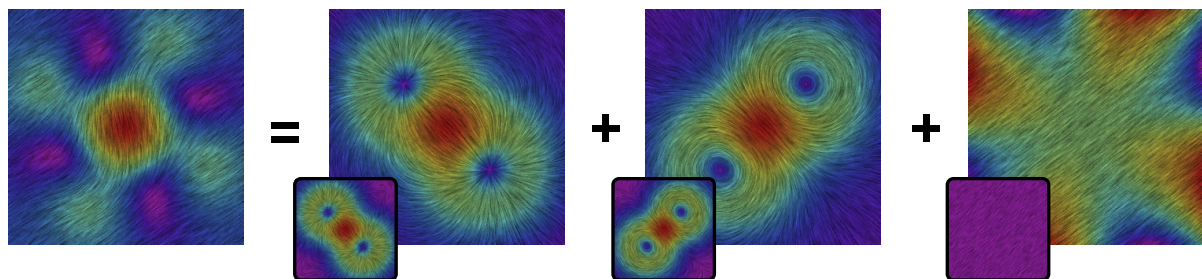


Figura 3: $\mathbf{v} = \mathbf{d}^* + \mathbf{r}^* + \mathbf{h}^*$, as figuras menores representam o campo analítico e as componentes maiores representam a decomposição.

Na componente harmônica da Figura 3 temos visualmente uma grande diferença entre a analítica e a recuperada pela decomposição. Isso se dá pois o campo analítico é constante, logo não há variação

de coloração, já o obtido pela decomposição possui pequenos erros ocasionando assim a coloração da componente. Apresentamos na Tabela 1 os erros dados pela decomposição.

	máximo	variância	mediana
$\ \mathbf{d}^* - \mathbf{d}_0\ $	1.31×10^{-1}	2.09×10^{-4}	9.17×10^{-2}
$\ \mathbf{r}^* - \mathbf{r}_0\ $	1.31×10^{-1}	2.09×10^{-4}	9.17×10^{-2}
$\ \mathbf{h}^* - \mathbf{h}_0\ $	2.26×10^{-1}	6.75×10^{-4}	1.83×10^{-1}

Tabela 1: Análise numérica dos erros da Decomposição Natural.

Exemplo 2. Para este exemplo o domínio usado é $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$, com o campo tendo um vórtice e uma fonte na origem, Figura 4. Exibimos na Tabela 2 os erros das componentes.

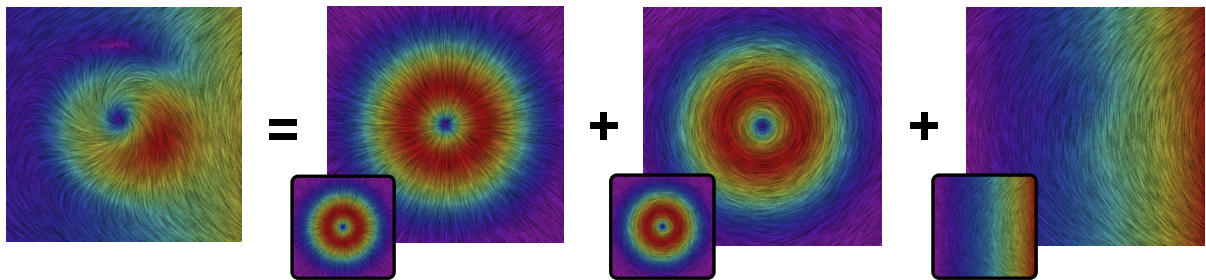


Figura 4: $\mathbf{v} = \mathbf{d}^* + \mathbf{r}^* + \mathbf{h}^*$, as figuras menores representam o campo analítico e as maiores a decomposição.

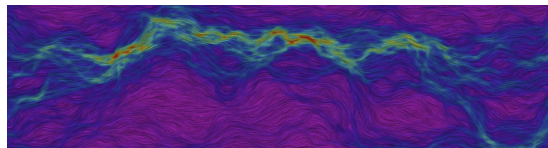
	máximo	variância	mediana
$\ \mathbf{d}^* - \mathbf{d}_0\ $	1.83×10^{-2}	2.50×10^{-5}	6.04×10^{-3}
$\ \mathbf{r}^* - \mathbf{r}_0\ $	1.83×10^{-2}	2.50×10^{-5}	6.04×10^{-3}
$\ \mathbf{h}^* - \mathbf{h}_0\ $	2.59×10^{-2}	4.99×10^{-5}	8.55×10^{-3}

Tabela 2: Análise numérica dos erros da Decomposição Natural.

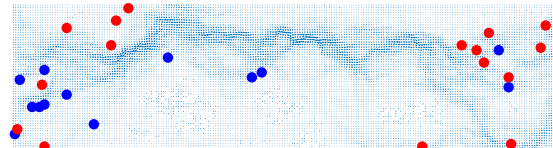
Detecção de Feições Características

A partir da decomposição de Helmholtz-Hodge as singularidades como, fontes, sorvedouros e vórtices são identificadas como os pontos críticos dos potenciais escalares utilizados para obtenção das componentes irrotacional e solenoidal, (POLTHIER; PREUSS, 2003).

Realizamos a identificação destas feições de um campo obtido pela simulação de extração de petróleo, vide Figura 5. Tal campo não possui componente irrotacional pois é proveniente de simulações com fluidos incompressíveis.



(a) Campo vetorial $\mathbf{v}$.



(b) Componente solenoidal, os pontos em azul representam vórtices no sentido horário, em vermelho os vórtices no sentido anti-horário.

Figura 5: Representação do escoamento do fluido (a), singularidades presentes no fluido(b).

Conclusões

A Decomposição Natural de Helmholtz-Hodge permite uma extensa aplicabilidade, haja vista que pode ser aplicada para qualquer campo vetorial, até mesmo para campos obtidos de processos reais mesmo desconhecendo suas origens. Os resultados ilustrados neste trabalho permitem concluir que o método de decomposição apresentado obtém soluções matematicamente consistentes. Além disso, ressalta-se a eficiência numérica/computacional do método.

A abordagem proposta pelo método permite ainda analisar de maneira fidedigna o campo vetorial uma vez que não é necessário impor condições de fronteira para obter a decomposição do campo, a qual pode ser imposta erroneamente.

Alguns avanços ainda podem ser explorados, principalmente no que se refere aos operadores diferenciais discretos que foram utilizados devido a sua baixa precisão em pontos sobre a fronteira. Neste sentido, a extensão teórica do campo utilizada na formulação pode ser adaptada para o contexto numérico evitando assim essa deficiência.

Referências

- BHATIA, H.; PASCUCCHI, V.; BREMER, P., The natural Helmholtz-Hodge decomposition for open-boundary flow analysis, **IEEE transactions on visualization and computer graphics**, v. 20, n. 11, p. 1566-1578, 2014.
- CAMPOS F. F., **Algoritmos numéricos**, LTC, 2007.
- CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE, M., **Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas**, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- EVANS, L. C., **Partial differential equations**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2002. (Graduate studies in mathematics).
- GRIFFITHS, D. J., **Introduction to electrodynamics**. 3rd ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999.
- HELGELAND, A. et al., Visualization of vorticity and vortices in wall-bounded turbulent flows, **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, v. 13, n. 5, p. 1055-1067, 2007.
- HELMAN, J.; HESSELINK, L., Representation and display of vector field topology in fluid flow data sets, **IEEE Computer Society**, v.22, n 8, p. 27-36, 1989.
- PETRONETTO, F., **A Equação de Poisson e a Decomposição de Helmholtz-Hodge com Operadores SPH**. 2008. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – PUC, Rio de Janeiro, 2008.
- POLTHIER, K.; PREUSS, E., Identifying vector field singularities using a discrete Hodge decomposition, **Visualization and Mathematics III**, Springer, p. 113-134, 2013.
- WARE, C. et al., Investigating Flow Visualizations using Interactive Design Space Hill Climbing, **IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics**, 2009.
- WIEBEL, A., **Feature Detection in Vector Fields Using the Helmholtz-Hodge Decomposition**, Diploma Thesis, University of Kaiserslautern: Germany, 2004.
- ZANGWILL, A., **Modern electrodynamics**. Cambridge University Press, 2013.

Análise numérica em tanque agitado por impelidor não convencional: curva de potência, número de bombeio e hidrodinâmica

Gustavo Gomes Ferreira
Universidade Federal do Espírito Santo
ferreira.g.gustavo@gmail.com

Alessandra Terezinha Silva Souza
Universidade Federal do Espírito Santo
aletssouza@gmail.com

Daniel da Cunha Ribeiro
Universidade Federal do Espírito Santo
daniel.ribeiro@ufes.br

Resumo: O presente trabalho tem como objetivo avaliar o comportamento de um tanque agitado dotado de um impelidor radial não convencional. A simulação computacional permite a otimização de custos de análises com experimentos físicos, melhorando a eficiência do processo de pesquisa. O modelo utilizado neste trabalho será fabricado futuramente para validação por processos experimentais, encontrando na Mecânica dos Fluidos Computacional (Computational Fluid Dynamics, CFD), a possibilidade de obtenção de resultados experimentalmente complexos. Inicialmente é apresentada a geometria do tanque agitado e o teste de independência da malha, posteriormente, a hidrodinâmica em padrão de escoamento promovida pela geometria do impelidor não convencional, além de propriedades características de tanques agitados, sendo estes o comportamento do número de potência e número de bombeio. O objetivo deste tanque é de manter em suspensão sais específicos para análise de precipitação, um dos principais problemas pouco compreendidos na indústria de petróleo e gás. Os resultados foram satisfatórios, nos quais os parâmetros do conjunto podem ser vistos como otimizados se comparados à literatura.

Palavras-chave: Tanque agitado. Impelidor radial não convencional. CFD. Número de potência. Número de bombeio.

Introdução

Tanques agitados são amplamente utilizados na indústria química e metalúrgica em processos como, por exemplo, polimerização, reações catalíticas, extração de solventes, precipitação, entre outros, como proposto por Cheng D. *et al.* (2013). Em um mercado cada vez mais competitivo busca-se sempre o melhor entendimento e controle sobre as etapas de produção garantindo produtos com maior qualidade e melhor relação custo-benefício.

Dentro dos processos de precipitação, o conjunto tanque impelidor deve ser dimensionado de modo a garantir uma mistura homogênea dos reagentes e a suspensão dos precipitados. Alguns parâmetros importantes nesse cenário são a curva de potência, que permite determinar a velocidade ótima de rotação do impelidor (WANG; ZHANG Li; ZHANG Yifei, 2010), o número de bombeio que determina a capacidade do sistema de manter sólidos em suspensão, como proposto por Olino (2010), e a análise hidrodinâmica do fluxo dentro do tanque (CHENG *et al.*, 2016). Neste trabalho, serão determinadas as curvas de potência e de bombeio para um impelidor não convencional e também, uma análise hidrodinâmica em um tanque agitado sem chicanas, utilizando ferramentas de CFD, considerando um escoamento tridimensional, incompressível, isotérmico, monofásico em regime permanente.

Modelo Matemático

O modelo matemático considera o escoamento tridimensional, incompressível, isotérmico, monofásico (água) em regime permanente, dentro de um tanque agitado. E tem como base, as equações de conservação de massa (Equação 1) e quantidade de movimento (Equação 2) (Manual Ansys CFX 19.1[®]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) - \nabla \cdot (\mu_{eff} \nabla \vec{U}) = \nabla p' + \nabla \cdot (\mu_{eff} \nabla \vec{U})^T + B \quad (2)$$

Onde ρ é a massa específica; $\vec{U}$ é o vetor velocidade; t é o tempo; μ_{eff} é a viscosidade efetiva; B é a soma das forças corpo e p' é a pressão modificada. O número de potência (N_p) e o número de bombeio (N_Q) são dados pelas Equações 3 e 4, respectivamente.

$$N_p = \frac{P}{N^3 D^5 \rho} \quad (3)$$

$$N_Q = \frac{Q}{N D^3} \quad (4)$$

Onde P é a potência; Q é a vazão volumétrica; N é a velocidade rotacional e D é o diâmetro do impelidor.

Foi escolhido o modelo de turbulência k- ϵ , o qual como apresentado por Olini (2010), é muito utilizado na indústria, apresentando resultados satisfatórios para casos semelhantes.

Modelagem numérica

Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos

No presente trabalho foi utilizado o software Ansys CFX[®] 19.1, o qual utiliza o Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos (MVFbE), uma variação do Método dos Volumes Finitos utilizando definições do Método de Elementos Finitos, o que alia as vantagens, respectivamente, de garantir a conservação da propriedade transportada e de trabalhar com geometrias complexas.

Critérios de Convergência

Uma tolerância prefixada adotada neste trabalho foi de convergência numérica quando os resíduos das equações de conservação são menores que 10^{-4} . Para garantir que esta represente uma convergência física, são dispostos pontos de monitoramento em posições aleatórias dentro do tanque.

Nesses pontos, dados de velocidade da água serão colhidos e plotados em um gráfico em função do passo de tempo, e assim, investiga-se se, ao alcançar a convergência numérica, os valores de fração volumétrica já estão constantes, mostrando que o problema também convergiu fisicamente.

Condições Iniciais e de Contorno

Nas paredes do tanque e no impelidor, adotou-se a condição de não deslizamento. O domínio do tanque é estacionário, velocidade igual a zero, porém para a haste do impelidor, pertencente a este domínio, em todas as simulações, será considerado velocidade igual à do domínio do impelidor, sendo este rotacionado com velocidade angular constante representando a ação das pás sobre o líquido. Para teste de independência de malha, a velocidade de rotação foi de 100 rpm, condizente ao valor que será utilizado como padrão para os ensaios experimentais futuros, regime turbulento ($Re = 7 \times 10^3$).

Testes de malha

O teste de independência de malha consiste em analisar para um mesmo caso específico, a solução para malhas com diferentes graus de refinamento. O método proposto foi a manipulação do parâmetro de malha Tamanho de Elemento (*Element Size*), até o limite de malha disponível para a versão estudantil do Ansys Meshing® 19.1, através de 8 malhas distintas, sendo a Malha 1, a menos refinada, e a Malha 8 a mais refinada. Como o *Element Size* não garante semelhança de elementos para toda a geometria, foram considerados os parâmetros de qualidade de malha: Qualidade Média do Elemento (recomendável entre 0 e 1) e Razão de Aspecto (razão entre máxima e mínima área das superfícies de todos os elementos, recomendado entre 0 e 2).

A malha foi gerada no software Ansys Meshing® 19.1, utilizando elementos unicamente tetraédricos, uma vez que estes se adaptam bem à maioria das geometrias, satisfazendo a modelagem de curvaturas e detalhes da geometria, como evidenciado por Poley (2014). A região próxima às pás do impelidor foi refinada com elementos menores, para refinar os cálculos do escoamento, mais complexos nessa região (ver Figura 1), conforme proposto por Poley (2014, apud MIRANDA, 2008). A análise visual e qualitativa da malha no volume de controle é crucial antes do prosseguimento da simulação, com o propósito de aumentar a garantia de que a simulação apresente resultados semelhantes à realidade.

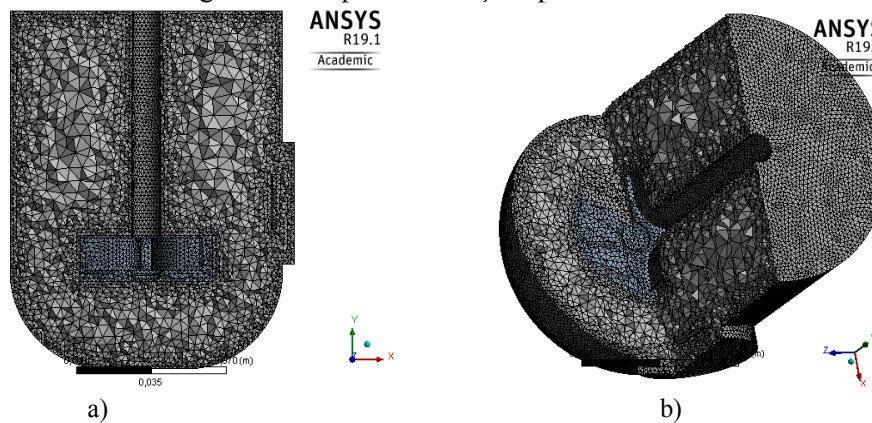


Figura 1: Cortes transversal da malha: a) visão lateral e b) diagonal, respectivamente, com a Malha 6.

Para perfil de velocidades, uma linha vertical próxima ao impelidor foi estabelecida, à direita do impelidor, no lado onde há a janela de observação. Com este, usou-se os pontos de picos de velocidades para o impelidor não convencional para teste de independência de malha, uma vez que a escolha sem análise qualitativa do escoamento pode induzir ao erro de mascarar os resultados.

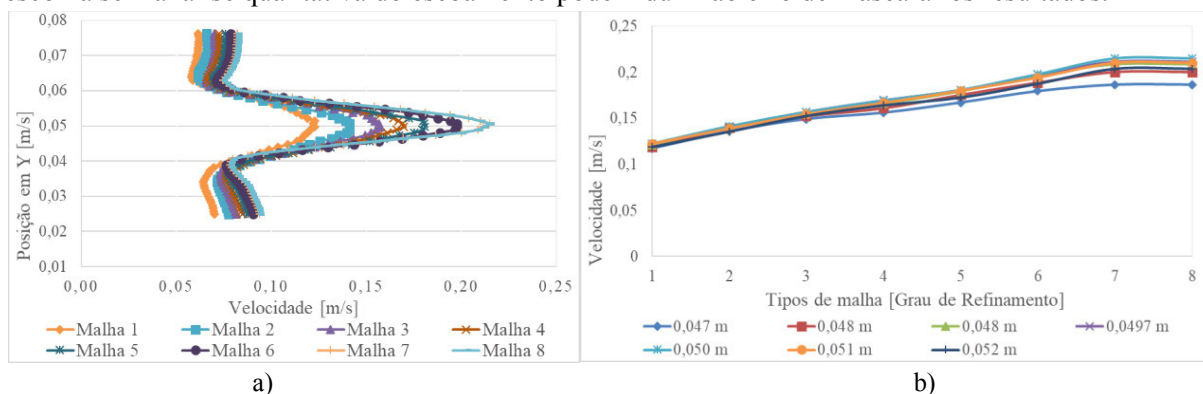


Figura 2: a) Perfil de velocidades próximo ao impelidor. b) Teste de independência de Malha.

Considerando que a geometria do impelidor é diferente de todas as outras já proposta na literatura, faz-se interessante analisar as características do escoamento. Como proposto por Ribeiro (2012, apud ROACHE, 1998), o estudo de independência de malha foi conduzido de forma a minimizar

os erros de discretização, em uma região de pontos específicos, sendo esta região escolhida onde há o maior pico de altas velocidades do perfil de velocidades apresentado na Figura 2a como proposto no subtópico deste trabalho Estratégia de Resolução. Numericamente, a partir da Malha 6 os valores começam a se tornar independente do grau de refinamento, sendo esta, portanto, a escolhida, como exposto na Figura 2b.

Geometria do tanque

A geometria utilizada para o presente trabalho é de um tanque agitado mecanicamente, no qual o compõe, o tanque de parede como limite externo, de 63,5 [mm] de raio e 165 [mm] de altura, com curvatura côncava até 35 [mm] com base de diâmetro 18,5 [mm], onde à uma haste central de 7 [mm] e 119,6 [mm] de comprimento à partir do topo, não conectada ao fundo do tanque. No fim do comprimento da haste, há o impelidor não convencional com 60 [mm] de diâmetro e 15 [mm] de altura composto por 4 pás. Um aparato de formato circular é colocado rente à superfície interna do tanque com diâmetro interno de 24 [mm], o qual será a janela de observação, instalada juntamente à um aparelho especial de fotografia, ver Figura 3.

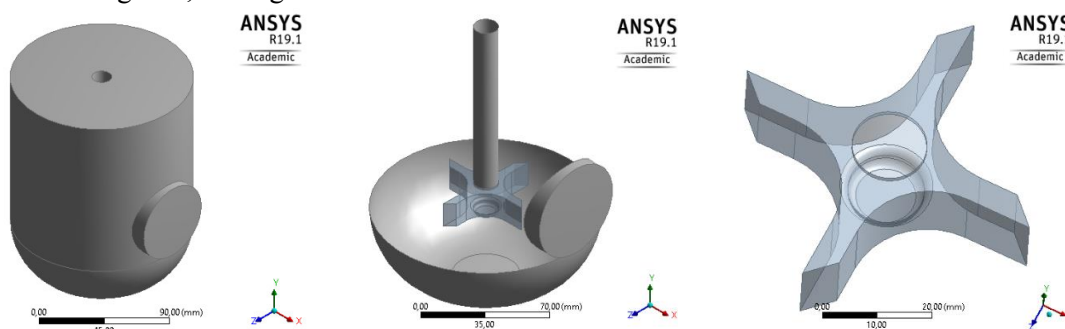


Figura 3. Visão diagonal superior da geometria do tanque, do tanque aberto e do impelidor não convencional, da esquerda para a direita.

Estratégia de Resolução

Para o número de potência, o método utilizado para calcular a Potência P (Equação 2) foi de usar o torque fornecido pelo Ansys CFD® nas paredes das pás do impelidor e na parede da haste, no eixo de rotação, multiplicados pela velocidade de rotação N , como proposto por Sophia (2010).

Para o número de bombeio, não há definição específica na literatura para determinar a vazão da Equação 4, desta forma, devido à característica radial do impelidor não convencional, foi considerada a vazão na interface entre o impelidor e o tanque, ponto mais próximo das pás.

Para o modelo de rotação do impelidor, foi utilizado o modelo MFR (*Multiple Frames of Reference*), no qual somente uma porção do volume do reator ao redor do agitador gira em relação à referência parada e o resto do tanque em repouso. Das possibilidades de MFR, o modelo escolhido foi o *Frozen Rotor*, onde os componentes em cada lado da interface são fixos.

Resultados e Discussões

Padrão do escoamento no interior do tanque agitado (Linhas de Corrente)

Como o propósito da geometria é manter os sólidos em suspensão, garantindo a visualização do comportamento destes pela janela de observação, faz-se crucial a análise do padrão de escoamento proporcionado pelo conjunto tanque-impelidor. Garantir o menor número de zonas de recirculação nas bordas, além de monitorar a localização das existentes é crucial para estudar os fenômenos desejados do

experimento. Para $N = 100$ rpm, as linhas de correntes são apresentadas na Figura 4, observando-se 2 zonas de recirculação, posicionadas uma acima e outra abaixo do impelidor, sendo que esta última, possui menor grau de recirculação. Comparado os resultados ao de Sophia (2010), o qual para o modelo de *Frozen Rotor* apresentou 2 zonas de recirculação principais, mas também outras secundárias, apresentando maior índice de zonas de baixa velocidade, e assim o modelo proposto neste trabalho representa uma otimização do padrão de escoamento no tanque em termos da distribuição da energia do escoamento por toda geometria, fator crucial para qualidade da suspensão de sólidos.

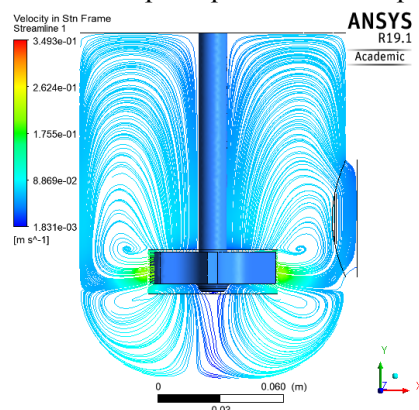


Figura 4. Padrão de escoamento formado no interior do tanque agitado à 100 rpm para *Frozen Rotor*.

Número de Potência

Além do perfil de escoamento, outro parâmetro a ser analisado para caracterizar a nova geometria de impelidor proposta é o Número de Potência, que fisicamente pode ser entendido como a razão entre forças de arraste e forças inerciais. Para um projeto de um sistema de mistura, faz-se interessante estimar a potência, uma vez que o consumo desta é proporcional ao custo da operação.

Analisa-se o número de potência (N_p) em função do número de Reynolds (Re), para compreender a relação entre a energia necessária para promover o escoamento (laminar, transiente ou turbulento). O número de potência depende de fatores geométricos, como número e geometria das pás, nível de inclinação das pás, geometria (diâmetro e posição do impelidor), presença de chicanas e propriedades do escoamento como velocidade de rotação e viscosidade. A análise do número de potência para o impelidor não convencional é apresentado na Figura 5.

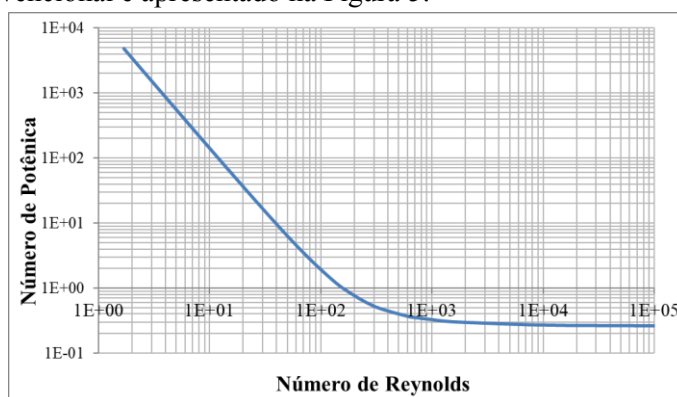


Figura 5. Número de potência x Número de Reynolds para o impelidor radial não convencional.

Entende-se pela interpretação do gráfico, juntamente com a análise comparativa de diversos impelidores distintos proposta por Paul, Obeng e Kresta (2004) que:

- Na fase de regime laminar $1 < Re < 10^2$, o N_p depende inversamente do número de Reynolds, o que mostra que a potência depende fortemente da viscosidade. Foi constatado numericamente, os torques na haste e no impelidor possuem mesma ordem de grandeza

- Na fase transicional $10^2 < Re < 10^3$, o número de potência varia suavemente.
- Na fase turbulenta à desenvolvida, $Re > 10^3$, o N_P é independente da viscosidade líquida, e o torque na haste é desprezível em comparação ao torque no impelidor.

A análise do comportamento do número de potência em função do regime de escoamento, permite compreender que, relativamente, muita energia (potência) é necessária para manter o escoamento em regime laminar, no entanto o oposto ocorre para os regimes transiente e turbulento. Analisando os estudos de ensaios mecânicos e simulações computacionais na literatura, com o tipo de escoamento como referência (Re), tem-se o entendimento do número de potência para o impelidor não convencional radial proposto nesse trabalho, de razão de diâmetros $D_{\text{impelidor}}/D_{\text{tanque}}$, $D/T = 1/2$):

Para simulações numéricas de geometrias semelhantes de impelidor, propostas por Nagata (1975) e Sophia (2010) encontrou-se para o impelidor do tipo 8 pás radial, N_P próximos de 1,2 para regime de turbulência, o que representa menor consumo energético com menos quantidade de pás, alcançando o mesmo regime de escoamento. Para tipos diferentes de impelidores, os valores experimentais obtidos por Nagata (1975) são em torno de $N_P = 1,4$. Analogamente, Paul, Obeng e Kresta (2004, apud RUSHTON, 1950), apresentou o impelidor radial do tipo 6 pás para diferentes $D/T = 1/5$ e $D/T = 1/8$, valores número de potência: $3 < N_P < 5$. Souza (2011, apud OLDSHUE, 1983) encontrou valores próximos de $N_P = 1$ para regime de turbulência do tipo 4 pás retas.

Nessas comparações, devem ser considerados as quantidades e geometrias diferentes de pás, bem como a razão de Diâmetros D/T . Através do estudo computacional percebe-se que a geometria proposta do impelidor não convencional apresenta valores baixos de N_P , requisitando menor potência para alcançar grandes números de Reynolds, se comparados às geometrias semelhantes.

Número de Bombeio

Outro parâmetro utilizado para caracterizar a capacidade de um tanque agitado é o número de bombeio (N_Q), que mede a capacidade de bombeamento do conjunto. O bombeamento pode ser definido como a quantidade de material descarregado por um impelidor rotativo.

Para regime laminar, o estudo do número de bombeio é dificilmente caracterizado na literatura. Sophia (2010) propõe o comportamento de N_Q para um impelidor de 4 pás inclinadas, no modelo de *Frozen Rotor*, apresentando o mesmo comportamento para a zona de turbulência, que para as condições geométricas do presente trabalho é em rotações próximas de 100 rpm. O número de bombeio mantém-se quase constante com leve decaimento com o aumento do Número de Reynolds, isto é, aumento da velocidade de rotação N , como proposto na Figura 6.

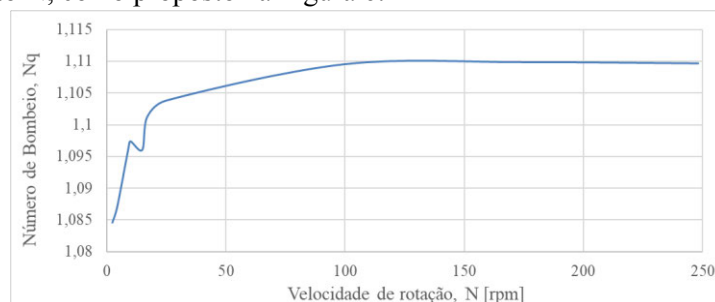


Figura 6. Número de Bombeio em função da velocidade de rotação para regimes transiente e turbulento.

Conclusões

Os resultados da simulação computacional são satisfatórios como modelo para estudo de precipitação, pois garante padrão de escoamento de suspensão ótima. O entendimento dos números de potência e bombeio permitiram a caracterização do arranjo tanque – impelidor, no qual o impelidor não

convencional possuiu resultados equivalentes à ótimos desses parâmetros comparados à literatura. Zonas de vortex e posicionamento do impelidor se tornaram objetivos para análises futuras.

Referências

ANSYS CFX. Ansys Help: CFX Theory Guide v. 19.1. Cannonsburg: Ansys Inc., 2018.

CHENG, D. *et al.* Numerical simulation of macro-mixing in liquid-liquid stirred tanks. *Journal of Chemical Engineering Science*, v. 101, p. 272-282, 2013.

CHENG, D. *et al.* Modelling and experimental investigation of micromixing of single-feed semi-batch precipitation in a liquid-liquid stirred reactor. *Journal of Chemical Engineering Journal*, 2016.

MIRANDA, R. C. Simulação de Tanque de Condicionamento de Reagentes por Mecânica dos Fluidos Computacional. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte (2008).

NAGATA, S. *Mixing – Principles and Applications*, Japan, Kodanska Scientific Books, 1975.

OLDSHUE, J.Y.; *Fluid Mixing Technology*. New York: McGraw-Hill Publications, 1983, 574p.

OLINO, A. L. M. Otimização de impelidor KPC utilizando Fluidodinâmica Computacional (CFD). 2010, 76p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – UNICAMP, Campinas, 2010.

PAUL, E. L., ATIEMO-OBENG, V., KRESTA, S. M. *Handbook of industrial mixing: science and practice*. EUA: John Wiley & Sons, 2004.

POLEY, I. M. Modelagem e simulação CFD de reações de transesterificação em tanques com agitação mecânica. Tese (Doutorado Engenharia Mecânica). Universidade Federal De Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.

RIBEIRO, D. C. Modelagem e simulação do escoamento de sistemas multifásicos em reatores agitados mecanicamente. 2012, 206p. Tese (Doutorado em Engenharia Química) - Universidade Federal De Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

ROACHE, P. J. *Verification and validation in computational science and engineering*. Hermosa Publishers, 1998

RUSHTON, J.H. *et al.* *Chemical Engineering Progress*. V.46, p.395, 1950.

SOPHIA, L. V. G. Análise comparativa das alternativas para simulação CFD de tanque de mistura operando em regime turbulento. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) Centro Universitário Da Fei, São Bernardo do Campo 2010.

SOUZA, E. Consumo de Potência para Impelidores Rápidos Aplicados em Processos de Agitação e Mistura. Tese (Doutorado em Engenharia Química) - Universidade Estadual De Campinas, 2011.

WANG, *et al.* Experimental investigation and CFD simulation of liquid-solid-solid dispersion in a stirred reactor. *Journal of Chemical Engineering Science*, v. 65, 2010.

Identificação de danos em uma viga de Euler-Bernoulli utilizando Redes Neurais Artificiais: uma avaliação em relação à posição do dano na estrutura

Andressa Alves Machado da Silva
Universidade Federal Fluminense
andressa_alves@id.uff.br

Cleber de Almeida Corrêa Junior
Universidade Federal Fluminense
cleberacj@id.uff.br

Diogo Teixeira dos Santos
Universidade Federal Fluminense
diogo_santos@id.uff.br

Rosilene Abreu Portella Corrêa
Universidade Federal Fluminense
rosileneportella@id.uff.br

Resumo: O presente trabalho tem por objetivo avaliar os resultados obtidos através de uma Rede Neural Artificial (RNA) na localização de danos em uma viga simplesmente apoiada de Euler-Bernoulli. Corrêa (2013) propõe a resolução do problema de identificação de danos, transformando-o em um problema de otimização onde o objetivo é minimizar um funcional definido pela diferença entre a matriz de flexibilidade obtida experimentalmente e a correspondente matriz prevista por um modelo de elementos finitos da estrutura. No entanto, para estruturas mais complexas, o autor sugere a utilização de métodos de localização de danos, visando diminuir o número de variáveis do problema. Assim, o processo de identificação de danos fica dividido em duas etapas: localização e quantificação do dano. Método de inteligência computacional, Redes Neurais Artificiais (RNA), tem por objetivo tentar imitar o funcionamento do cérebro humano, suas características mais relevantes são a adaptação por experiência, capacidade de aprendizado e habilidade de generalização. Sendo assim, acredita-se que a substituição dos métodos de localização de danos utilizados em Corrêa (2013) por Redes Neurais Artificiais (RNA) pode gerar melhores resultados. Com isso, o objetivo deste trabalho é avaliar se a RNA é capaz de localizar e/ou quantificar danos em regiões da viga apontadas por Corrêa (2013) como sendo mais (ou menos) sensíveis à presença de dano estrutural. Neste momento não serão considerados dados ruidosos.

Palavras-chave: Identificação de danos. Matriz de flexibilidade. Redes Neurais Artificiais.

Introdução

A identificação de danos tem se tornado tema de relevantes pesquisas, pelo fato da sua importância em diversos ramos da Engenharia. A identificação de danos em estágio inicial juntamente com o monitoramento contínuo da estrutura, promovem grandes benefícios como: a redução dos custos de manutenção e a garantia de mais segurança na utilização da mesma. Métodos de otimização estocásticos tem sido bastante utilizados na identificação de danos estruturais devido à necessidade de lidar com características como, por exemplo, não linearidade, presença de ruído e medição de um número limitado de Graus de Liberdade (GDL). No entanto, estruturas mais complexas, onde um grande número de variáveis precisam ser atualizados, podem gerar um grande custo computacional ao se utilizar tais métodos, o que dificulta a sua utilização para um monitoramento contínuo estrutural.

Corrêa (2013), testou diversos métodos disponíveis na literatura para localizar danos estruturais, visando com isso, diminuir o número de parâmetros a serem atualizados pelos métodos de otimização. Com isso, pretendia-se fazer a identificação de danos em duas etapas: localização da região

afetada pelo dano estrutural e quantificação do dano. Apenas na segunda etapa seriam utilizados métodos de otimização, para atualizar os parâmetros da região indicada na primeira etapa. Dessa forma pretendia-se diminuir o custo computacional dos métodos de otimização. No entanto, dos sete métodos de localização de danos avaliados, nenhum deles apresentou bons resultados quando um número limitado de Graus de Liberdade (GDL) foram utilizados ou quando considerou-se a presença de ruído de medição. Sendo assim, optou-se por testar o desempenho das Redes Neurais Artificiais (RNA) para substituir a primeira etapa da identificação de danos citada acima. Há ainda a expectativa que a utilização da RNA sozinha seja capaz de atender o processo de localização e quantificação de dano, sem a necessidade de utilização de algum método de otimização.

Redes Neurais Artificiais tem uma grande vantagem em relação aos métodos de otimização, após seu treinamento ser concluído, dada uma entrada com os dados das matrizes de flexibilidade da estrutura, os resultados sobre a posição e o dano são imediatos. Com isso, o objetivo deste trabalho é avaliar os resultados obtidos através de uma RNA em uma viga simplesmente apoiada de Euler-Bernoulli. As posições de danos utilizadas para testar a rede, foram escolhidas de acordo com o trabalho de Corrêa (2013), onde mostra-se que, dependendo da região da viga onde há o dano, pode haver maior dificuldade para a localização e quantificação correta do dano estrutural.

Modelagem do Problema de Identificação de danos

Utilizando a teoria de autovalores e autovetores para obter as frequências naturais e as formas modais não-amortecidas da estrutura, tem-se

$$(K - \omega_i^2 M)\phi_i = 0 \quad (1)$$

onde M é a matriz de massa e K a matriz de rigidez, ambas com dimensão $n \times n$. Os termos ω_i e ϕ_i referem-se, respectivamente, à i – ésima frequência natural e à i – ésima forma modal da estrutura.

De forma geral,

$$K\phi = M\phi\Lambda \quad (2)$$

onde ϕ é a matriz modal da estrutura, de dimensão $n \times n$ e Λ é uma matriz diagonal, $n \times n$, formada pelos valores quadráticos das frequências naturais, $\lambda_{ii} = \omega_i^2$.

Para as formas modais da estrutura normalizadas em relação à matriz de massa, tem-se

$$\phi^T M \phi = I \quad (3)$$

$$\phi^T K \phi = \Lambda \quad (4)$$

sendo I a matriz identidade e T representa a transposição de uma matriz.

Considerando a Equação (4) e o fato da matriz de flexibilidade de uma estrutura ser a inversa da matriz de rigidez, tem-se

$$G(\phi\Lambda^{-1}\phi^T) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \phi_i \phi_i^T \quad (5)$$

Devido às limitações experimentais, na prática tem-se a seguinte aproximação para a matriz de flexibilidade experimental G_{exp} da estrutura,

$$G_{\text{exp}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} \frac{1}{\omega_{i,\text{exp}}^2} \phi_{i,\text{exp}} \otimes \phi_{i,\text{exp}} \quad (6)$$

com $n_{\text{exp}} < n$ o número de modos obtidos do ensaio experimental, $\omega_{i,\text{exp}}$ e $\phi_{i,\text{exp}}$ são, respectivamente, a i – ésima sequência natural não-amortecida e forma modal obtidas experimentalmente.

Uma boa estimativa para a matriz de flexibilidade pode ser obtida experimentalmente a partir de modos de mais baixa frequência da estrutura. Da Equação (6), deve-se notar que a dimensão da matriz G_{exp} depende apenas do número m de grau de liberdade (GDL) medidos no ensaio de vibrações,

que é equivalente ao número de componentes dos modos experimentais $\phi_{i,exp}$. Sendo assim, a matriz de flexibilidade possui dimensão $m \times m$. Portanto, para se definir um problema de identificação de danos estruturais baseado na matriz de flexibilidade, torna-se necessária a determinação de uma matriz de flexibilidade analítica reduzida $\bar{G}$ relacionada apenas aos m GDL medidos no ensaio de vibrações que contenha informações a respeito das propriedades de rigidez da estrutura como um todo. Para tal, a matriz de rigidez original deve ser particionada na forma

$$K = \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{mo} \\ K_{mo}^T & K_{oo} \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde os índices m e o referem-se, respectivamente, aos GDL medidos e omitidos. Alvim, Peterson e Park (1995) mostram que $\bar{G}$ é igual à inversa da matriz rigidez reduzida, obtida pela redução estática de Guyan (1965), então

$$\bar{G} = [K_{mm} - K_{mo}K_{oo}^{-1}K_{mo}^T]^{-1}. \quad (8)$$

Redes Neurais Artificiais (RNA)

As Redes Neurais Artificiais (RNA) são modelos matemáticos inspirados em neurônio biológicos e na estrutura de processamento paralelo do cérebro, que tem a capacidade de armazenar conhecimento experimental para utilizar futuramente. Segundo Haykin (2001, p.27) as RNA's se assemelham ao cérebro em dois aspectos: na capacidade de aprendizagem em seu ambiente e nos pesos sinápticos que são utilizados para armazenar conhecimento.

O neurônio artificial mostrado na Figura (1) é a unidade de processamento fundamental para a RNA, uma vez que, a combinação de diversos neurônios gera uma RNA.

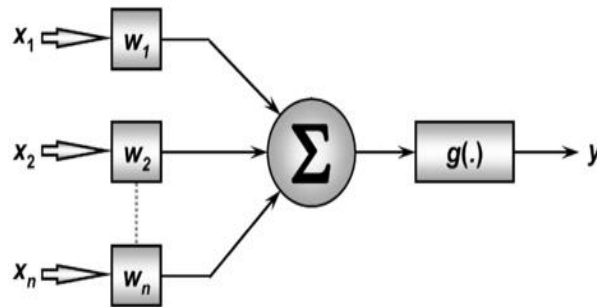


Figura 1: Modelo de neurônio artificial.

Fonte: Palmiere, 2016.

Na Figura (1), $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ são as entradas da rede, $w = w_1, w_2, \dots, w_n$ são os pesos sinápticos, $\sum = NET = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n$, g é a função de ativação e $y = g(NET)$ é a saída da rede.

A diferença entre uma RNA e outra, está na sua arquitetura e no modo como os pesos sinápticos associados às conexões são ajustados durante o treinamento e também na sua topologia (número de neurônios por camadas, funções de ativação, etc.). A RNA *Perceptron de Múltiplas Camadas* (PMC) utilizada nesse trabalho é dada como na Figura (2). Uma rede pode ter um treinamento supervisionado ou não supervisionado. O treinamento supervisionado é feito informando as entradas e saídas para rede, podendo assim, calcular os erros da RNA durante e após o treinamento.

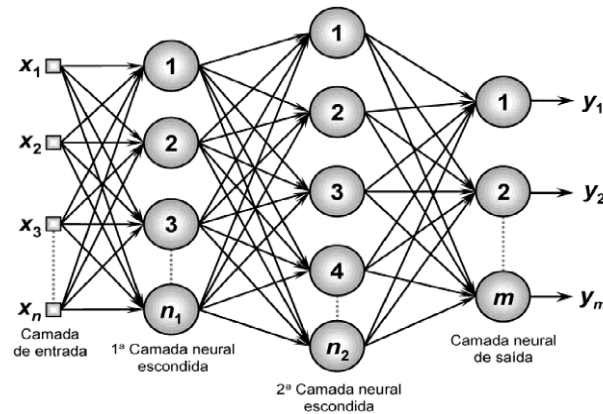


Figura 2: RNA Perceptron de múltiplas camadas.
Fonte: Palmiere, 2016.

Resultados

No problema de identificação de danos proposto, é considerado uma viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada. Será considerada uma viga de alumínio simplesmente apoiada com 1,0 m de comprimento, 0,005 m de espessura, 0,05 m de largura, módulo de elasticidade nominal $E_0 = 7,2582 \times 10^{10}$ Pa e momento de inércia de área nominal $I_0 = 5,2083 \times 10^{-10} m^4$. A viga em questão foi discretizada pelo Método dos Elementos Finitos em 20 elementos bidimensionais do tipo Euler-Bernoulli. Foram adotados elementos com dois nós, onde cada ponto nodal possui dois GDL de deslocamento, um transversal e outro de rotação, e um parâmetro de coesão. A estrutura possui, portanto, um total de 21 nós, 40 GDL, devido às condições de contorno abordadas, e 21 parâmetros nodais de coesão. No entanto, foram considerados medidos apenas 10 GDL transversais e igualmente espaçados. Admitiu-se os modos de vibração na faixa de frequência de 0-450Hz. A imposição do defeito a viga é realizada através de uma redução na altura relativa da seção transversal $h(x)/h_0$, sendo h_0 a espessura original da viga e $h(x)$ a espessura na posição danificada. Portanto, nos nós defeituosos tem-se $h(x)/h_0 < 1$, e nos nós onde não há danos tem-se $h(x)/h_0 = 1$. Toda a discretização do campo de danos foi realizada via método dos elementos finitos.

A imposição de dano é realizada escolhendo-se em uma posição e um valor para o parâmetro de coesão β , dado pela Equação (9)

$$\beta = \left(\frac{h(x)}{h_0} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (9)$$

β varia no intervalo $[0, 1]$. Se β é igual a 1 a estrutura está sem danos, sendo $\beta = 0$ uma ruptura local deve ser considerada.

A RNA abordada nessa pesquisa é uma rede *Perceptron de Múltiplas Camadas* (PMC), utiliza-se no processo de treinamento supervisionado da rede o algoritmo *backpropagation* com *momentum*. Para geração dos dados de entrada para a RNA utiliza-se a Equação (10),

$$E_k = \frac{|G_{mm}(i, j) - G_{exp}(i, j)|}{|G_{mm}(i, j)|} \cdot 100 \quad (10)$$

onde E_k com $k = 1, 2, \dots, mxm$ representa cada elemento do vetor de entrada E , (i, j) representa cada elemento das matrizes G_{mm} e G_{exp} , com $i, j = 1, 2, \dots, m$.

Neste estudo, segue-se a teoria presente em Pereira (2018) na fase de treinamento da rede. A rede foi treinada sem a presença de dados ruidosos. A rede foi testada em todas as posições da viga (posição 1, ..., posição 21) com três valores de parâmetro de coesão em cada posição, $\beta = 0,216, \beta = 0,422$ e $\beta = 0,729$. Utilizou-se no processo de treinamento da rede: 100 sinais de

entrada, três camadas neurais escondidas com 100 neurônios cada uma, uma camada neural de saída com 21 neurônios, função de ativação: *tansig* nas camadas neurais escondidas e *logsig* na camada neural de saída, algoritmo de treinamento *Gradient descen backpropagation* com *momentum* e taxa adaptativa. Sendo estabelecidas 800.000 iterações, como o máximo de iterações permitidas, erro final de 10^{-7} , taxa de aprendizagem de 0,4, coeficiente de *momentum* 0,6. A rede foi treinada atingindo-se o número máximo de iterações permitidas com um erro de $3,31.10^{-7}$.

Após o treinamento da rede neural, segue-se para a etapa de teste da mesma. As posições escolhidas são baseadas no trabalho de Corrêa (2013), onde mostra-se que as regiões próximas aos extremos da viga apresentam menos sensibilidade à presença de dano, sendo assim mais difícil a correta detecção de danos estruturais nestas localizações. A Tabela 2 apresenta as posições e parâmetros utilizados para teste da rede neural após o treinamento.

Tabela 2: Dados de Teste da rede.

Caso	Posição do dano	β	$h(x)/h_0$
1	2	0,512	0,8
2	3	0,512	0,8
3	4	0,512	0,8
4	9	0,512	0,8
5	10	0,512	0,8
6	11	0,512	0,8
7	18	0,512	0,8
8	19	0,512	0,8
9	20	0,512	0,8

Abaixo os resultados gráficos para identificação de danos utilizando RNA. Em todos os casos analisados o método conseguiu localizar o dano e também, vale-se destacar, que obteve-se uma ótima estimativa da intensidade do dano estrutural.

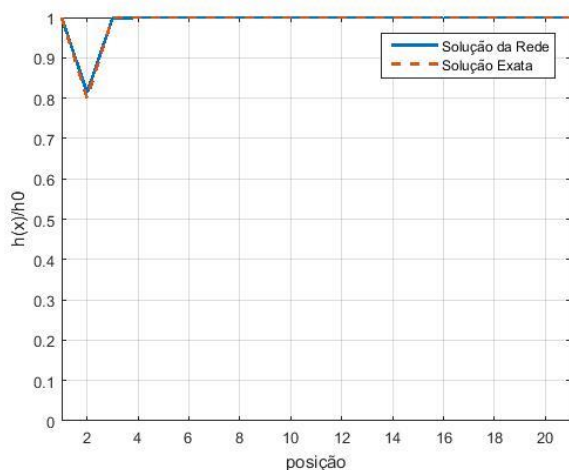


Figura 3- Identificação de danos Caso 1

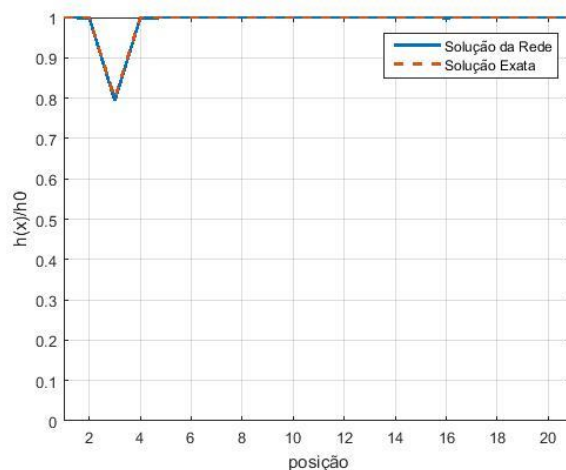


Figura 4- Identificação de danos Caso 2

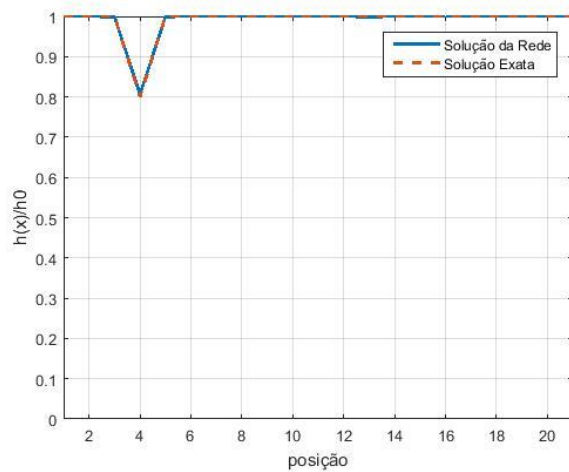


Figura 5- Identificação de danos Caso 3

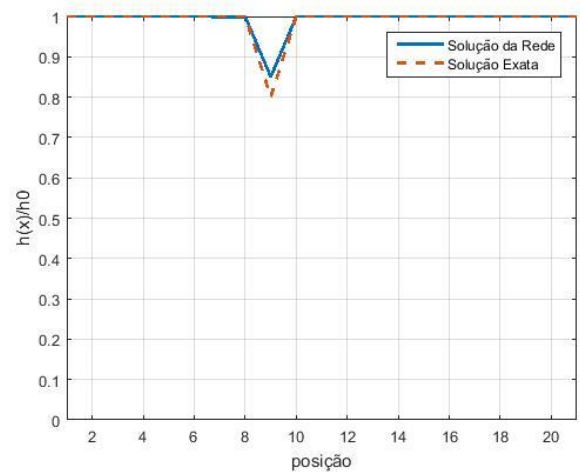


Figura 6- Identificação de danos Caso 4

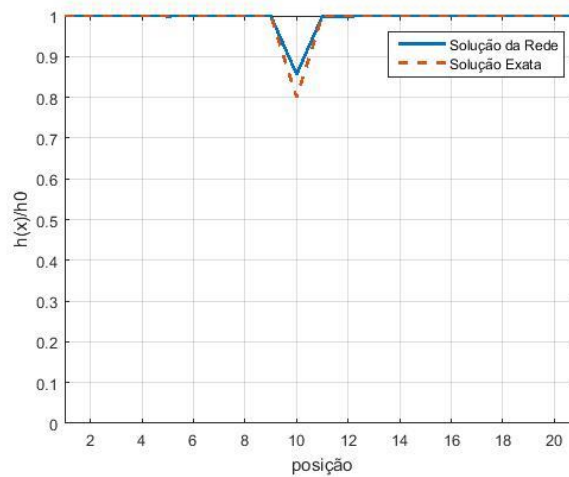


Figura 7- Identificação de danos Caso 5

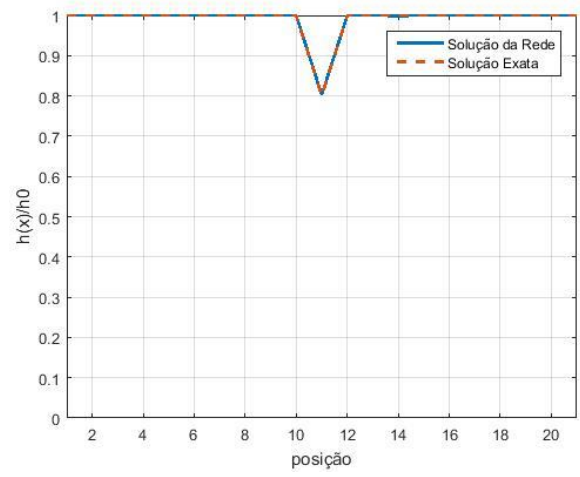


Figura 8- Identificação de danos Caso 6

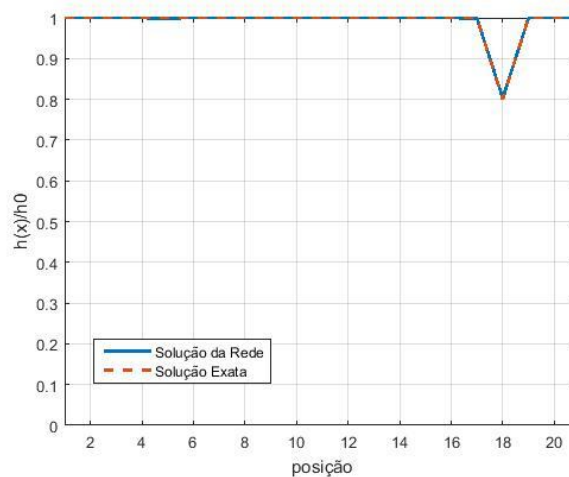


Figura 9- Identificação de danos Caso 7

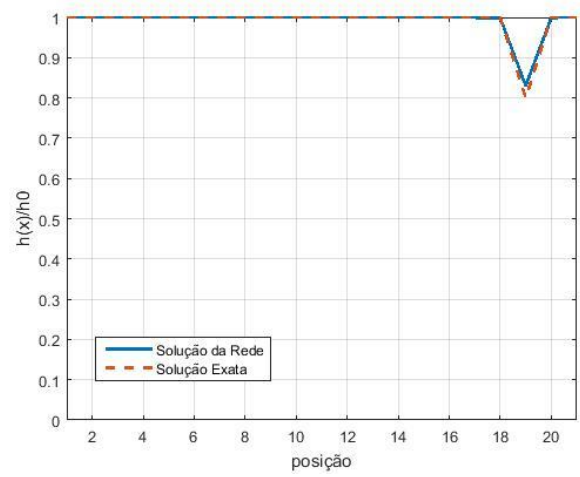


Figura 10- Identificação de danos Caso 8

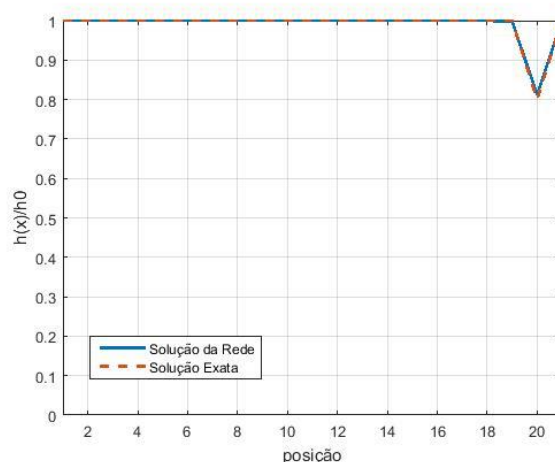


Figura 11- Identificação de danos Caso 9

Os resultados obtidos mostram que, na ausência de ruídos de medição e em cenários de danos simples, a utilização de RNA juntamente com a matriz de flexibilidade estrutural, foi capaz de localizar e quantificar os danos simulados independentemente da posição onde o mesmo foi imposto. Devido às funções de interpolação lineares utilizadas para se descrever o campo de danos, tem-se o perfil de dano triangular que pode ser observado nos resultados.

Conclusões

A utilização de RNA em substituição aos métodos de localização de danos apresentados por Corrêa (2013) mostrou resultados bastante satisfatórios, visto que foi possível identificar a região potencialmente danificada. Além disso obteve-se também uma ótima estimativa da intensidade do dano estrutural, o que gera uma grande expectativa de a RNA ser capaz de localizar e quantificar o dano estrutural sem a necessidade de utilização de algum método de otimização. Vale ressaltar que foram considerados um número bastante reduzido de GDL da estrutura, admitindo-se apenas modos de vibração na faixa de 0-450 Hz. No entanto, outros testes devem ser realizados para garantir a eficiência do modelo utilizado, como por exemplo, na simulação de danos múltiplos e a presença de ruído de medição.

Agradecimentos

Ao apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

Referências

- ALVIN, K.F.; PETERSON, L.D.; PARK, K.D. Method for determining minimum-order mass and stiffness matrices from modal test data. *AIAA Journal*, vol. 1, n. 33, p. 128-135, 1995. DOI:10.2514/3.12342.
- CORRÊA, R.A.P. **Identificação de danos em estruturas bi-dimensionais via matriz de flexibilidade baseada em um modelo de dano contínuo**. 2013. 131 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional)– IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, 2013.
- GUYAN, R. J. Reduction of stiffness and mass matrices. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 3, n. 2, p. 380, 1965. DOI:10.2514/3.2874.
- HAYKIN, S. **Redes neurais: princípios e prática**. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- PALMIERE, S. **Arquitetura e topologia de Redes Neurais Artificiais**. 2016. Disponível em: <https://www.embarcados.com.br/redes-neurais-artificiais/>. Acesso em: 10 de out. de 2018.
- PEREIRA, J. L. **Identificação de danos estruturais baseada em um modelo de dano contínuo via Redes Neurais Artificiais**. 2018. 94 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional)–MCCT/UFF, Volta Redonda, 2018.

Sincronismo de sinais baseado no APSoC Zynq

Alison França Queiroz da Costa
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
alisonfqc94@gmail.com

Michael John Brennan
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
mj.brennan@unesp.br

Ailton Akira Shinoda
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
aa.shinoda@unesp.br

Resumo: - Este trabalho analisa o uso do APSoC Zynq no sincronismo de sinais aplicados a vazamentos em tubulações de água aterrada, utilizando a placa de desenvolvimento Minized juntamente com um conversor analógico-digital Pmod AD1, um módulo Pmod GPS e um relógio em tempo real Pmod RTCC. Para esta análise foram utilizados modelos criados no Xilinx Vivado®, baseados em *Intellectual Property blocks* e o *software* Xilinx SDK. A partir do modelo desenvolvido foi testado o sincronismo entre duas placas Minizeds, os resultados obtidos comprovaram a eficiência no uso do APSoC em aplicações de correlacionamento de sinais.

Palavras-chave: Sincronismo. Função Distribuição Cumulativa. Zynq.

Introdução

Atualmente a água potável é um recurso de extrema importância para a sociedade, além de estar cada vez mais escasso em determinados locais, gerando a necessidade de medidas que combatam o desperdício da mesma. No Brasil, segundo o Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento (SNIS), cerca de 38,1% da produção de água potável é perdida ao longo da distribuição da mesma até os consumidores, a Tabela 1 ilustra as perdas de água em cada região do Brasil (SNIS, 2016).

Tabela 1: Porcentagem regional de perda de água

Região	Porcentagem (%)
Norte	52,8
Nordeste	47,3
Sudeste	33,0
Sul	37,0
Centro-Oeste	33,2
Brasil	38,1

Segundo o SNIS, o Brasil vem ao longo dos anos diminuindo as perdas de água ocasionadas na distribuição da mesma, porém essa taxa de 38,1% está muito alta comparado a outros países. A Alemanha e o Japão reduziram suas perdas para uma média de 10%, além disso Austrália e Nova Zelândia apresentaram média abaixo dos 10% (SNIS, 2016).

Pensando na redução das perdas provenientes de vazamentos em tubulações aterradas, ao longo dos anos foram realizadas diversas pesquisas, segundo (HUNAIDI *et al.*, 2004) os principais métodos são baseados em equipamentos, podendo ser acústicos ou não, sendo eles:

- Dispositivos de escuta;
- Registradores de ruído;
- Correlacionador de sinais;
- Técnica de gás marcador;

- Termografia;
- Radar de penetração do solo.

O presente trabalho está focado no uso de correlacionadores de sinais para a detecção de vazamentos em tubulações aterradas de plástico. O correlacionador de sinais é composto por um microprocessador e dois sensores (acelerômetro, hidrofone ou geofone) e utiliza-se da técnica de correlação cruzada, no qual são dispostos dois sensores em uma seção da tubulação e através de um microprocessador, e da função de correlação, pode-se determinar o ponto exato do vazamento. Este método possui uma alta precisão em relação a outras abordagens, porém é necessário um treinamento adequado dos operadores, possui um custo elevado e a função de correlação depende de vários fatores, o que o torna complexo na determinação exata do ponto de vazamento.

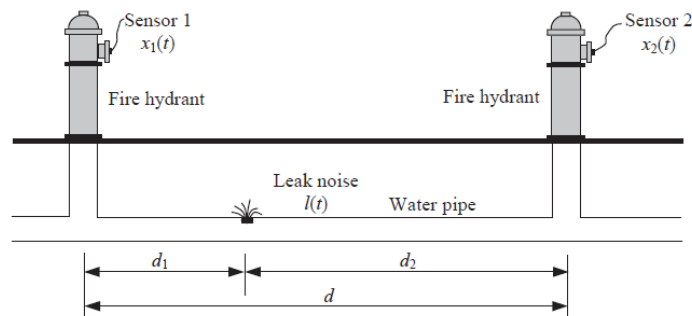


Figura 1: Esquemático de um correlacionador de sinais

A Figura 1 representa o esquemático de um correlacionador de sinais, sendo os hidrantes os pontos de acessos das tubulações, a distância do vazamento em relação ao sensor 1, segundo (FUCHS, 1991), pode ser calculada por (1).

$$d_1 = \frac{d - cT_0}{2}, \quad (1)$$

Sendo T_0 o atraso de sinal e c a velocidade de propagação da onda na tubulação.

No caso de tubulações de plástico, este método se torna ainda mais complexo, pois existe um alto amortecimento da onda no interior da tubulação e do meio externo, diminuindo a propagação da onda. Além disto a energia de vazamento em tubulações de plástico se encontra em baixas frequências, a presença de ressonâncias limita ainda mais estas frequências, sendo necessário a utilização de filtros passa-baixa para a realização das análises (ALMEIDA *et al.*, 2014).

Outro fator relevante na análise de vazamento em tubulações de plástico é a incerteza em relação ao valor da velocidade de propagação da onda, sendo este valor essencial para a determinação da localização do vazamento (BRENNAN *et al.*, 2005).

Infraestrutura

Para o projeto foi escolhido o uso do *All Programmable System-on-Chip* (APSoC) Zynq, ou seja, um único *chip* é capaz de implementar um sistema inteiro. Sua principal característica é a combinação de um processador ARM e um *Field Programmable Gate Array* (FPGA), sendo possível utilizar um sistema operacional, como o Linux embarcado, junto com uma FPGA. A união entre o sistema operacional e a arquitetura programável da FPGA evita problemas de interface entre dois dispositivos separados, reduz o tamanho físico e seu custo total (CROCKETT *et al.*, 2014).

O Zynq é dividido em duas partes principais: o *Processing System* (PS) e a *Programmable Logic* (PL).

O PS é a parte formada pelo processador ARM, onde rotinas de software e o sistema operacional são implementados, enquanto o PL é a parte formada pelo FPGA, podendo implementar

subsistemas lógicos, aritméticos e operações que exijam fluxo de dados de alta velocidade (CROCKETT et al., 2014). A Figura 2 apresenta, de forma simplificada, a arquitetura do APSoC Zynq, na qual é ilustrada as duas partes que compõem o APSoC Zynq, PS e PL, e para a interconexão entre as partes, tem-se o *Advanced Extensible Interface* (AXI).

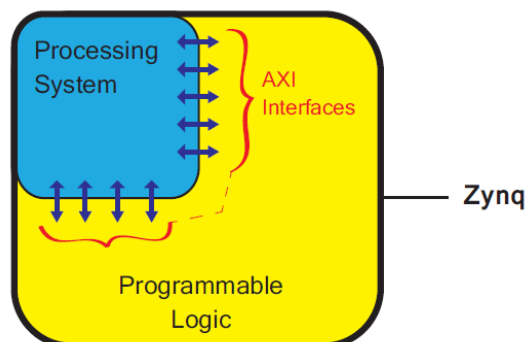


Figura 2: Arquitetura simplificada do APSoC Zynq

O PS compreende, além do processador ARM, um conjunto de recursos de processamento nos quais formam a *Application Processor Unit* (APU), memória cache, interfaces de memória, interconexões e circuitos de geração de *clock* (CROCKETT et al., 2014).

O PL é composto por uma FPGA, nos APSoC Zynq, geralmente são utilizados os modelos Artix®-7 e Kintex®-7. A FPGA é composta de vários componentes afim de criar um dispositivo semiconductor no qual o usuário pode reconfigurá-lo. Os principais componentes são:

- *Configurable Logic Block* (CLB), compostos de *flip-flops* e blocos que implementam funções lógicas;
- Blocos de Entrada / Saída (IOB), circuitos responsáveis pela interface de dispositivos externos com recursos PL;
- *Switch Matrix*, responsável por facilitar as conexões entre os CLBs ou entre um CLB e outro elemento PL.

Modelagem

Para a realização dos testes de bancada, utilizou-se a placa de desenvolvimento Minized (AVNET, 2018), tal placa foi escolhida devido ao baixo custo, além de possuir o APSoC Zynq modelo 7Z007S.

Além da placa Minized foi necessário a utilização de módulos externos, sendo eles: Pmod AD1, Pmod RTCC e Pmod GPS. O Pmod AD1 é um conversor analógico-digital de 12 bits (DIGILENT, 2016a) e será responsável pela aquisição de dados no correlacionador de sinais. O Pmod RTCC é um *clock* em tempo real (DIGILENT, 2016c), juntamente com o Pmod GPS (DIGILENT, 2016b), eles são responsáveis por realizar o sincronismo entre os sinais adquiridos.

Para a modelagem do sistema deste trabalho, foi utilizado o programa Xilinx Vivado® (XILINX, 2018), onde é possível criar projetos usando *Intellectual Property* (IP) *blocks*, os blocos IP são especificações de hardware que podem ser utilizadas para configurar os CLBs da FPGA, eles podem ser classificados em *hard IP block* e *soft IP block*.

Os *soft IP blocks* são blocos nos quais o usuário pode fazer alterações em suas configurações. Já os *hard IP blocks* não permitem ao usuário personalizar suas configurações, tendo a desvantagem de não ter uma portabilidade fácil para outros dispositivos, mas também traz a vantagem de uma alta precisão na análise do desempenho de tempo e espaço necessário no hardware (CROCKETT et al., 2014).

O Vivado® possui vários *soft IP blocks* que podem ser usados em vários modelos APSoC Zynqs, entre ele o modelo 7Z007S, os IP *blocks* são usados para modelar o sistema usado no projeto. Além dos IPs disponibilizados pelo Vivado®, há os IP *blocks* desenvolvidos por empresas parceiras e comunidades *open source*, conhecidos como *third-party IP blocks*. No projeto são utilizados os IP *blocks* desenvolvidos pela empresa Digilent, referente a cada modulo Pmod utilizado.

Usando o Vivado®, foi criado um projeto de bloco baseado nos *soft* IPs *blocks* do próprio software e os *third-party* IPs do Pmod AD1, Pmod RTCC e Pmod GPS. Este modelo, como mostrado na Figura 3, é composto por 10 IP *blocks*, sendo 1 referente ao PS do Zynq 7Z007S, bloco utilizado para configurar a FPGA de forma a ser possível a utilização dos outros componentes adicionais; 1 para realizar o reset do PS, bloco necessário para realizar o sincronismo de *clock* entre o OS e os demais IPs; 1 IP *block* para interconexões AXI entre PS e PL; 2 IP *blocks* usados para entrada / saída para fins gerais (GPIO); 1 IP *block* para PMOD AD1; 1 IP *block* para PMOD RTCC, 1 IP *block* para PMOD GPS e o IP *block* CONCAT, sendo este responsável por gerar interrupções quando necessária aos blocos.

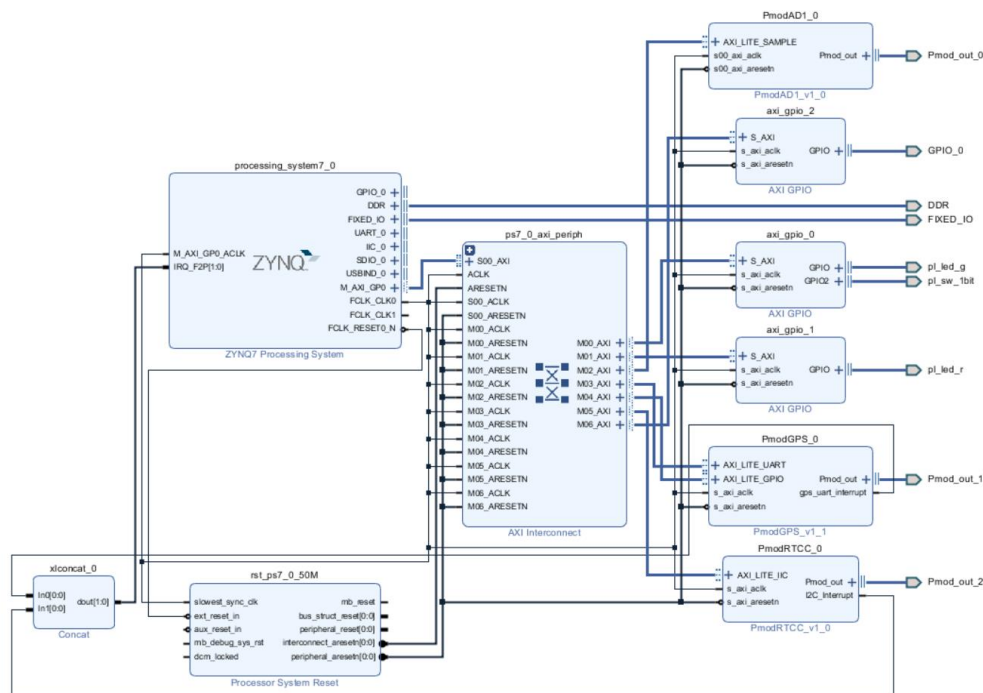


Figura 3: Block design Minized+ADC+RTCC+GPS

Ao finalizar o *block design*, é necessário gerar o *wrapper* HDL (*Hardware Description Language*) para o *design*. Após a finalização do HDL deve-se gerar o arquivo *bitstream*, sendo este arquivo responsável em armazenar todos os dados sobre a configuração da FPGA realizada através dos IP *blocks*.

Com o arquivo *bitstream* concluído, emprega-se o Xilinx *Software Development Kit* (XSDK) para escrever o código na utilização dos Pmods na placa Minized. O XSDK é um software no qual é possível a partir de um projeto *bitstream*, escrever códigos em linguagem C / C++ e implementá-los nos sistemas APSoc Zynqs. O próprio software fornece vários exemplos de códigos a serem utilizados para o APSoc Zynq, no caso deste projeto foi utilizado e modificado um exemplo fornecido pela Digilent para o uso dos Pmods (DIGILENT, 2018).

Quando o código é finalizado, o XSDK irá gerar automaticamente, se não houver erros no código, um arquivo tipo *elf*, arquivo usado para programar o APSoc Zynq.

Resultados

Finalizado e implementado o código para a utilização dos Pmod pela Minized, montou-se um *setup* experimental. O *setup* consiste de dois Minizeds juntamente com os Pmod AD1, RTCC e GPS, um osciloscópio, um gerador de sinal e um computador. A Figura 4 mostra o *setup* experimental, exceto o computador, empregado nos testes.

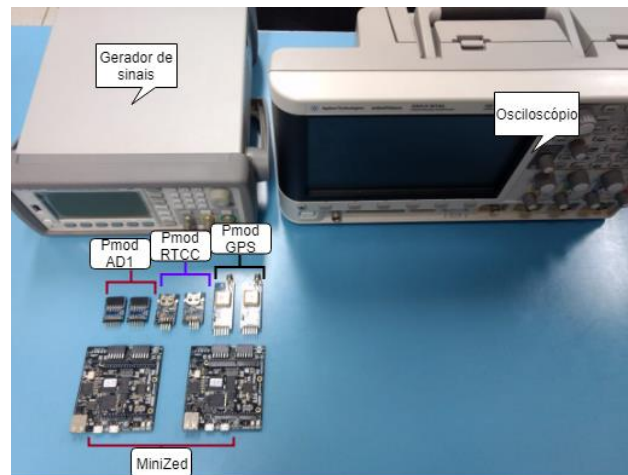


Figura 4: Setup experimental

Para a realização do sincronismo entre as placas, utiliza-se inicialmente o Pmod GPS para adquirir o horário exato para cada uma das placas, essa informação será utilizada para configurar o Pmod RTCC e assim ambas as placas estarão sincronizadas através do horário do GPS e por meio de um alarme, disponível no Pmod RTCC, é possível realizar a aquisição de dados pelo Pmod AD1. Porém existe a possibilidade de ocorrer algum atraso devido ao processamento da placa ou dos módulos, acarretando assim, um mal funcionamento do correlacionador de sinais, pois dependendo do atraso entre os sinais pode ocorrer uma variação significativa na detecção do vazamento de água.

Para contornar esta situação, além da utilização do alarme, utiliza-se o pulso por segundo (PPS) disponível no módulo GPS, o PPS é um pulso que ocorre a cada segundo, com duração de 100 ms e ele está sincronizado diretamente com o GPS, sendo assim o PPS nos dois módulos utilizados estarão em sincronismo. Portanto para realizar a aquisição de sinais será necessário a espera de dois sinais de partida, o primeiro sinal referente ao alarme gerado pelo Pmod RTCC e após esse sinal, espera-se pelo próximo PPS gerado pelo GPS, tendo os dois sinais, então será iniciado a aquisição de dados pelo Pmod AD1.

A Figura 5 ilustra, de forma simplificada, o diagrama de blocos do funcionamento de cada placa Minized para realizar seu sincronismo.

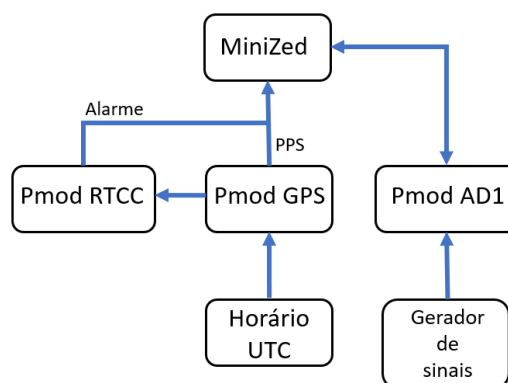


Figura 5: Diagrama de blocos Minized+ADC+RTCC+GPS

A Figura 6 apresenta os sinais de PPS e alarme das duas placas Minizeds, obtidos no osciloscópio.

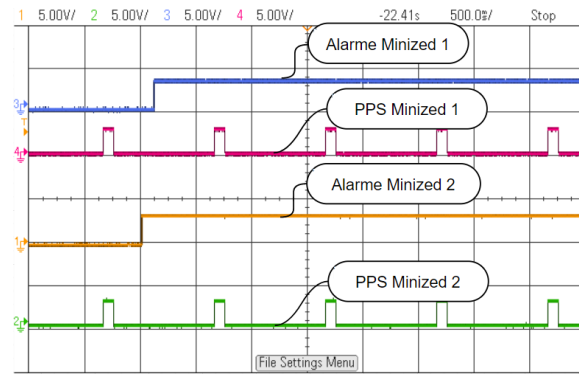


Figura 6: Sinais de alarme e PPS

Para visualizar e medir o sincronismo através do osciloscópio, adicionou-se um pino na programação realizada no XSDK, este pino é mantido em nível lógico baixo, quando os sinais de alarme e PPS são identificados o pino muda para nível lógico alto, sendo possível visualizar o momento exato no qual o Pmod AD1 estará entrando em funcionamento. A Figura 7 apresenta o sinal de sincronismo das duas placas Minizeds, analisando a Figura 7 pode-se ver que as placas estão em sincronismo, vale ressaltar que o atraso depende da resolução temporal empregada no osciloscópio.

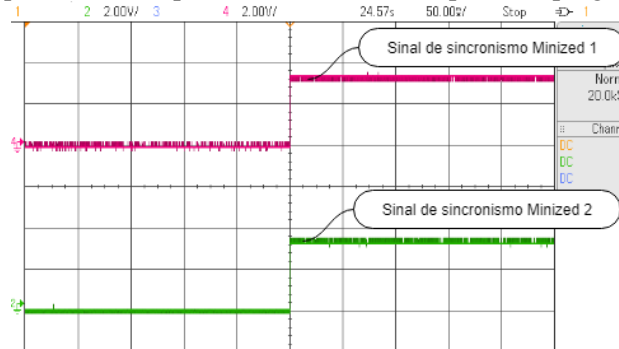


Figura 7: Sinais de sincronismo

Para a medição do sincronismo foram coletadas 50 amostras em períodos diferentes (dia e hora), afim de verificar eventuais diferenças. Para melhor análise dos dados com as amostras obtidas gerou-se uma Função Distribuição Cumulativa, como apresentada na Figura 8.

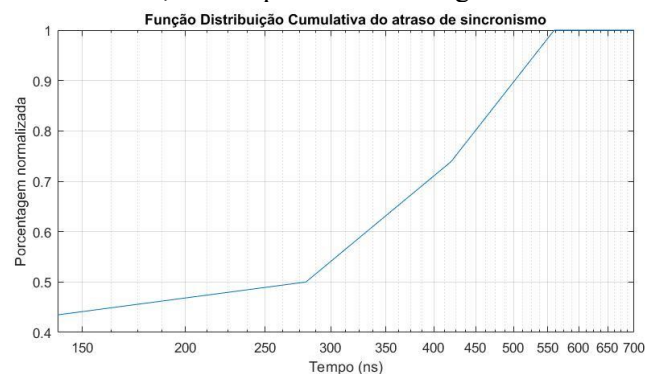


Figura 8: Função Distribuição Cumulativa

Analisando a Figura 8 observa-se que a diferença de tempo entre os sinais de sincronismo está na escala de centenas de ns e com 90% com atraso menor ou igual a 500ns.

Conclusões

A velocidade de propagação do ruído de vazamento nas tubulações plásticas nos trabalhos de Brennan (2018) situa-se em torno de 544 m/s, a incerteza para uma taxa de 90% da Função

Distributiva Cumulativa de 500 ns representaria nesse cenário um erro de $\pm 0,27$ mm na posição do vazamento, um valor desprezível nessa situação. Esse resultado mostra que o protótipo do correlacionador proposto atende o requisito de sincronismo.

A próxima etapa é testar o protótipo na aquisição de sinais acústicos através de sensores (acelerômetros) ocasionado por vazamentos de água em tubulações aterradas e a transferência desses dados por meio de comunicação sem fio.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Este trabalho é financiado pela FAPESP através do processo 2016/24974-2.

Referências

ALMEIDA, F. C. L. et al. **An investigation into the effects of resonances on the time delay estimate for leak detection in buried plastic water distribution pipes**. Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EUROODYN 2014. Porto, Portugal: [s.n.]. 2014.

AVNET. MiniZed. **Zedboard**. Disponível em: <<http://zedboard.org/product/minized>>. Acesso em: 1 outubro 2018.

BRENNAN, M. J. et al. **On the effects of soil properties on leak noise propagation in plastic water distribution pipes**. Journal of Sound and Vibration. [S.l.]: [s.n.]. 2018.

BRENNAN, M. J. et al. **Some Recent Research Results on the use of Acoustic Methods to Detect Water Leaks in Buried Plastic water Pipes**. ISVR Technical Memorandum. [S.l.]: [s.n.]. 2005.

CROCKETT, L. H. et al. **The Zynq Book**. 1a. ed. [S.l.]: Strathclyde Academic Media, 2014.

DIGILENT. Getting Started with Digilent Pmod IPs. **Digilent**. Disponível em: <<https://reference.digilentinc.com/learn/programmable-logic/tutorials/pmod-ips/start>>. Acesso em: 19 jul. 2018.

DIGILENT. PmodAD1 Reference Manual. **DIGILENT**, 2016. Disponível em: <https://reference.digilentinc.com/_media/pmod/pmodAD1_rm.pdf>. Acesso em: 5 out. 2018.

DIGILENT. PmodGPS™ Reference Manual. **DIGILENT**, 2016. Disponível em: <https://reference.digilentinc.com/_media/reference/pmod/pmodgps/pmodgps_rm.pdf>. Acesso em: 5 out. 2018.

DIGILENT. PmodRTCC™ Reference Manual. **DIGILENT**, 2016. Disponível em: <https://reference.digilentinc.com/_media/reference/pmod/pmodrtcc/pmodrtcc_rm.pdf>. Acesso em: 6 out. 2018

FUCHS, H. V.; RIEHLE, R. Ten years of experience with leak detection by acoustic signal analysis. **Applied Acoustics** **33**, 1991. 1-19.

HUNAIDI, O. et al. **Acoustic methods for locating leaks in municipal water pipe networks**. International Conference on Water Demand Management. Dead Sea, Jordan: [s.n.]. 2004. p. 1-14.

XILINX, Vivado Design Suite User Guide, 2018.

Diagnóstico assistido por inteligência computacional para identificação de anemias

Lucas de Souza Kort Camp

Universidade Federal Fluminense

lucas.kort@outlook.com

Márcio Eccard Kort Kamp

Universidade Federal Fluminense

marciokort@gmail.com

Cleber de Almeida Corrêa Junior

Universidade Federal Fluminense

cleberacj@yahoo.com.br

Rosilene Abreu Portella Corrêa

Universidade Federal Fluminense

rosiportella@yahoo.com.br

Resumo: Esse trabalho propõe o uso de redes neurais artificiais (RNAs) na identificação de quadros de anemia por meio de análise de exames de sangue do tipo hemograma completo. Esse procedimento é geralmente realizado por médicos. Entretanto, esse presente trabalho investiga a possibilidade de tal diagnóstico ser sistematizado para poder ser fornecido por computadores, funcionando como um auxiliador do médico no momento do diagnóstico.

Palavras-chave: Redes Neurais Artificiais. Hemograma. Exame de Sangue. Anemia

Introdução

A anemia é uma patologia sistêmica com diversas manifestações no indivíduo. Essa patologia é apresentada por um quadro de disfunção hematológica que resulta em uma redução no nível normal da hemoglobina (Hb) circulando no plasma (DEROSSI & RAGHAVENDRA, 2003), responsável pelo transporte de oxigênio pelo corpo. A Hb normal consiste numa molécula composta por um grupo heme, que contém ferro, e por cadeias de globina.

Segundo a Organização Mundial de Saúde (OMS), podemos definir Anemia quando encontramos um quadro inferior a 13,5g/dl de Hb nos homens e 12 g/dl nas mulheres. Devemos considerar também o hematócrito (Hct), razão entre Hb no citoplasma.

O hemograma completo é de grande valia para o diagnóstico, permitindo a confirmação do quadro por meio dos níveis de Hb e Hct, a análise morfológica das hemácias e, de acordo com os índices hematimétricos, contribuir para a classificação da anemia. Entretanto, como esses valores são apenas concentrações e não medidas absolutas, devem ser tratados com ressalvas, já que fatores como idade, gravidez, altitude, hábitos tabácicos e etnia influenciam a concentração de Hb (HOLCOMB, 2005).

Apesar da anemia ser reconhecida como problema de saúde pública a alguns anos, não foram registradas melhoras significativas no que diz respeito a sua erradicação, prevalecendo, portanto, em níveis muito altos entre a população.

A incidência e a prevalência da anemia aumentam com a idade. Devido a menstruação, as mulheres têm ainda uma maior tendência a terem anemia. Interessantemente, após os 65 anos, essa tendência é invertida (HOLCOMB, 2005; BALDUCCI, 2010).

Por limitar o transporte de oxigênio (devido ao menor número de células transportadoras), a anemia limita a energia disponível para atividade celular e para síntese de novas proteínas, acarretando na imunossupressão, fadiga, falta de concentração, fraqueza e palidez.

Modelagem do problema

Redes Neurais Artificiais com Retropropagação

As redes neurais retropropagáveis (ou do inglês *Backpropagation*) é um algoritmo de treino de redes multicamadas baseadas no aprendizado supervisionado por correções de erros, constituído de:

- Propagação: Depois de apresentado o padrão de entrada, a resposta de uma unidade é propagada com entrada para as unidades na camada seguinte, até a camada de saída, onde é obtida a resposta da rede e o erro é calculado.
- Retropropagação: Desse erro calculado, são feitas as alterações nos pesos sinápticos

Propagação

Dado um padrão de entrada $X(iq)$, cada componente $x(iq, i)$ de $X(iq)$ será ponderado por um peso $W_1(i, j)$, onde iq é o contador de padrões, i é o contador de entradas, e j o contador de neurônios na camada escondida. Após a ponderação, ocorre, em cada neurônio da próxima camada, um somatório dessas entradas ponderadas, conhecido como NET.

$$NET(iq, j) = \sum_{i=1}^{N+1} x(iq, i) W_1(i, j) \quad (1)$$

Considerando N como sendo o número total de neurônios na camada escondida. O fato de o somatório variar até $N+1$, deve-se ao fato de estar considerando-se o bias como um peso que pondera um componente a mais da entrada, cujo valor atribuído seria -1 .

Após calculado o NET, o valor obtido passa por uma função de ativação previamente definida, que pode ser por exemplo a função abaixo:

$$F(NET(iq, j)) = \frac{1}{1 + e^{(-NET(iq, j))}} \quad (2)$$

Neste momento é conveniente calcular-se a derivada da função de ativação, pois seu uso será necessário mais adiante. No caso de a função de ativação ser do tipo da apresentada na Equação (2), tem-se que a derivada será:

$$F'(NET(iq, j)) = NET(iq, j) e^{(-NET(iq, j))} (F(NET(iq, j)))^2 \quad (3)$$

Depois de obtido o $F(NET)$, Equação (2), toma-se o valor de $F(NET)$ como sendo uma entrada para uma próxima camada, e deverá ser ponderada da mesma forma que foi a primeira entrada. Este procedimento é repetido até chegar a camada de saída:

$$NET(iq, k) = \sum_{j=1}^{M+1} F(NET(iq, j)) W_2(j, k) \quad (4)$$

onde k é o contador de neurônios da camada de saída e M o total de neurônios desta camada. Calculado o NET da última camada, pode-se ou não o passar por uma função de ativação, dependendo da necessidade da aplicação. Obtendo-se assim uma saída $z(iq, k)$ da rede neural.

$$z(iq, k) = \sum_{j=1}^M F(NET(iq, j)) W_2(j, k) \quad (5)$$

Neste instante, calcula-se o erro, e, cometido para este padrão de entrada, apresentam-se os próximos padrões de entrada e somam-se os erros cometidos para cada padrão apresentado obtendo-se um erro total, ET , onde, caso o erro total for maior do que um “erro gol” previamente cometido então

faz uma nova época (apresentação de todos os padrões) e atualizam-se os pesos de cada camada, retropropagando o erro, se não pare, a rede já está treinada.

A Equação que fornece o erro para este padrão de entrada é:

$$e(iq, k) = t(iq, k) - z(iq, k) \quad (6)$$

A Equação que fornece o erro total, usando NQ como o número de padrões apresentados à rede, é:

$$ET = \frac{1}{2} \sum_{iq=1}^{NQ} \sum_{k=1}^M e(iq, k)^2 \quad (7)$$

Retropropagação

Enquanto o erro total cometido pela rede neural for maior que uma tolerância prefixada, então cada peso deverá ser atualizado através de um processo de retropropagação do erro, o qual atualizará os pesos de acordo com a sua contribuição para o erro. O funcionamento dessa atualização pode ser explicitado da seguinte forma:

Camada de saída:

$$W_2(j, k) = W_2(j, k) + \Delta W_2(j, k) \quad (8)$$

Fazendo:

$$\Delta W_2(j, k) = -\eta \frac{ET}{W_2(j, k)} \quad (9)$$

Onde η é a taxa de aprendizagem.

Para atualizar cada peso, deve-se aplicar a regra da cadeia até chegar ao peso que se quer atualizar.

Para atualizar $W_2(j, k)$, basta derivar $\frac{ET}{W_2(j, k)}$ e substituir o resultado na Equação (8).

Como em:

$$\frac{ET}{W_2(j, k)} = \frac{ET}{e(iq, k)} \frac{e(iq, k)}{W_2(j, k)} \quad (10)$$

$$\frac{ET}{e(iq, k)} = e(iq, k) \quad (11)$$

$$\frac{e(iq, k)}{W_2(j, k)} = \frac{e(iq, k)}{z(iq, k)} \frac{z(iq, k)}{W_2(j, k)} \quad (12)$$

$$\frac{e(iq, k)}{z(iq, k)} = -1 \quad (13)$$

$$\frac{z(iq, k)}{W_2(j, k)} = \frac{z(iq, k)}{NET(iq, k)} \frac{NET(iq, k)}{W_2(j, k)} \quad (14)$$

$$\frac{z(iq, k)}{NET(iq, k)} = F'(NET(iq, k)) W_2(j, k) \quad (15)$$

$$\frac{NET(iq, k)}{W_2(j, k)} = F(NET(iq, j)) \quad (16)$$

A Equação procurada então seria:

$$W_2(j, k) = W_2(j, k) + \eta e(iq, k) F'(NET(iq, k)) W_2(j, k) F(NET(iq, j)) \quad (17)$$

Camadas Escondidas

Repete-se o mesmo procedimento, mudando apenas o peso em relação ao qual ocorre a derivada.

$$\frac{ET}{W_1(i, j)} = \frac{ET}{e(iq, k)} \frac{e(iq, k)}{W_1(i, j)} \quad (18)$$

$$\frac{ET}{e(iq, k)} = e(iq, k) \quad (19)$$

$$\frac{e(iq, k)}{W_1(i, j)} = \frac{e(iq, k)}{z(iq, k)} \frac{z(iq, k)}{W_1(i, j)} \quad (20)$$

$$\frac{e(iq, k)}{z(iq, k)} = -1 \quad (21)$$

$$\frac{z(iq, k)}{W_1(i, j)} = \frac{z(iq, k)}{NET(iq, k)} \frac{NET(iq, k)}{W_1(i, j)} \quad (22)$$

$$\frac{z(iq, k)}{NET(iq, k)} = F'(NET(iq, k)) W_2(j, k) \quad (23)$$

$$\frac{NET(iq, k)}{W_1(i, j)} = \frac{NET(iq, k)}{F(NET(iq, j))} \frac{F(NET(iq, j))}{W_1(i, j)} \quad (24)$$

$$\frac{NET(iq, k)}{F(NET(iq, j))} = W_2(j, k) \quad (25)$$

$$\frac{F(NET(iq, j))}{W_1(i, j)} = \frac{F(NET(iq, j))}{NET(iq, j)} \frac{NET(iq, j)}{W_1(i, j)} \quad (26)$$

$$\frac{F(NET(iq, j))}{NET(iq, j)} = F'(NET(iq, j)) \quad (27)$$

$$\frac{NET(iq, j)}{W_1(i, j)} = x(iq, i) \quad (28)$$

$$W_1(i, j) = W_1(i, j) + \eta e(iq, k) F'(NET(iq, k)) W_2(j, k)^2 F(NET(iq, j)) x(iq, i) \quad (29)$$

Arquitetura e Topologia da RNA

Para o nosso estudo, foi formado um banco de dados com 30 exames de sangue, cedidos pela clínica da Casa de Saúde Pio XII, no município de Santo Antônio de Pádua -RJ. Nesses exames de sangue, apesar de não termos os nomes dos pacientes, foram fornecidos, além do hemograma completo, o sexo e a idade do paciente. Com esses dados foi possível montar nosso banco de dados em planilhas para serem importadas pelo Matlab. É importante notar que as matrizes foram compostas apenas de números, sendo atribuídos números **0** para o sexo feminino e **1** para o masculino e a mesma metodologia foi usada para designar pacientes anêmicos, **1**, e saudáveis, **0**. Todos os exames foram

escolhidos e ordenados de forma aleatória. Os diagnósticos foram então executados pelo médico consultor. A Tabela 1 contém os dados de treinamento e as saídas esperadas.

Tabela 1 - Dados de entrada e saída esperada do treinamento.

Sexo	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
Idade	24	1	5	42	75	61	33	28	23	72	89	96	4	16	3	12	9	71	1	1	11	1
Hematócrito	33	33	35	34	38	38	45	37	31	39	28	34	39	39	35	38	33	34	31	33	38	32
Hemoglobina	11	10.8	11.6	11.3	12.6	12.6	15	12.3	10.7	13	9	11.3	13	13	11.7	12.6	10.8	11.3	10.3	10.8	12.4	10.4
Hemácias	3.7	3.72	3.9	3.8	4.2	4.2	5.01	4.1	3.58	4.3	3.24	3.8	4.3	4.3	3.9	4.2	3.7	3.8	3.7	3.78	4.2	3.68
Saída esperada	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1

É importante notar ainda que nosso banco de dados foi bem rico em diversidade. Tivemos uma amostra com 46,7% dos pacientes sendo homens, 60% apresentando anemia e com idades entre 1 a 96 anos. Essa diversidade é importante por dar credibilidade de generalização ao estudo. Não foi estudado apenas um grupo etário ou de mesmo sexo.

Para a construção do nosso banco de dados, omitimos diversos valores que são irrelevantes para a detecção de anemia, considerando apenas dados necessários e suficientes para tal diagnóstico, sendo eles: idade, sexo, hematócrito, hemoglobina e hemácias. Os demais dados, apesar de importantes para a classificação da anemia, não são importantes para a detecção da mesma. Deixamos estes dados para serem analisados em um próximo trabalho, com classificação dos tipos de anemia.

Após construirmos a planilha, separamos aleatoriamente 22 exames para serem treinados e 8 para testarmos o programa. Também testamos os 22 exames usados no treinamento.

Ajustamos nossa rede neural artificial com 4 camadas ocultas, sendo cada uma delas contendo 100, 100, 100 e 1 neurônio respectivamente. As funções de transferência foram a Tangente hiperbólica para as 3 primeiras camadas e sigmóide para a última.

O algoritmo de treinamento, como explicado no anteriormente, foi o retropropagável de gradiente decrescente com momentum e taxa adaptativa. Ajustamos o erro desejado para $1e-7$, uma taxa de aprendizado, encontrada por tentativa e erro, de 0.65 e taxa de momentum de 0.8. O gradiente foi modificado do padrão pra $1e-11$. Nossa rede obteve a resposta com 5724 iterações, em 22 segundos de execução. O resumo do treinamento está ilustrado na Figura 1.

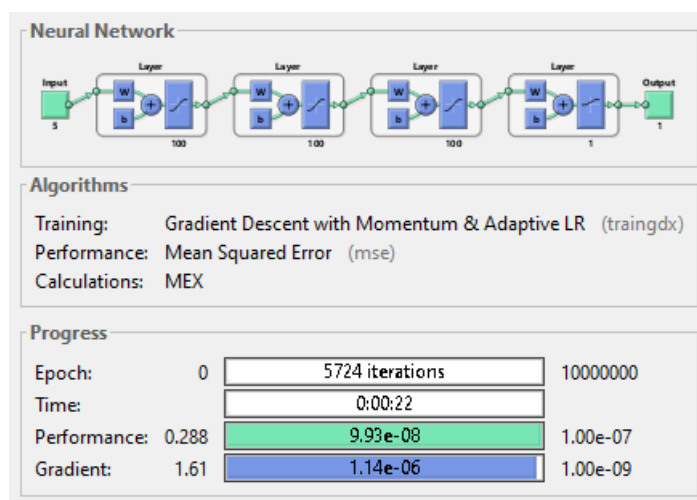


Figura 1 - Resumo do treinamento

Resultados e discussões

No primeiro teste de nossa rede, testamos os 22 exames usados no treinamento e ao simular a rede, verificamos que todos os 22 exames foram julgados pelo programa, entre saudável e anêmico, corretamente. Esse resultado nos permitiu prosseguir com os testes.

No teste programado dos 8 exames que foram extraídos do total da amostra para esse mesmo fim, nosso programa julgou corretamente 100% dos casos. Mais satisfatoriamente ainda, foi o nível de precisão em que este algoritmo fez seu julgamento. Sendo 0, total certeza de que o paciente não possui anemia e 1, total certeza que o referido paciente está anêmico, nosso programa não foi mais longe que 0.19 do resultado ideal. Vale notar que esse exame em especial, possuía valores no limite da definição, representando assim uma situação onde o diagnóstico é mais complicado. A Tabela 1 mostra o julgamento e o resultado esperado/ideal sem aproximação. Resultados fornecidos diretamente pela variável rede.

Tabela 2 – Dados de entrada e saída para os testes

Sexo	0	0	1	1	1	0	0	1
Idade	86	52	82	82	20	11	84	78
Hematócrito	35	36	28	37	37	36	27	43
Hemoglobina	11,6	12	9,3	12,3	12,3	12	9	14,2
Hemácias	3,9	4	3,2	4,1	4,1	4	3,1	4,7
Resultado do programa	1.00	0.19	1.00	1.00	0.99	0.00	1.00	0.06
Resultado ideal/real	1.00	0.00	1.00	1.00	1.00	0.00	1.00	0.00

É importante notar que o exame que apresenta a maior imprecisão ao diagnóstico, o segundo exame da tabela acima, mostrando 19% de possibilidade de anemia, é um exame de difícil diagnóstico, por ter a Hemoglobina, por exemplo, no limite da definição da doença, que é a concentração de 12g/dl. Situação que justifica o uso de redes neurais no diagnóstico de anemia.

Conclusão

Neste trabalho usamos o programa Matlab, versão R2018a (9.4.0.813654) 64bits, sendo executado em um notebook Dell Vostro 5470, com sistema operacional Windows 10 (*build* 1809), 8gb de memória RAM e processador Intel Core i5-4210U com *clock* entre 1.7GHz a 2.4GHz.

Os resultados observados no item Resultados e Discussões mostram a viabilidade de analisar um exame de sangue quanto a anemia por meio de redes neurais. Mostram ainda que, apesar de dispormos de um pequeno banco de dados, nosso programa se mostrou eficiente. Fica agora o desejo pessoal e a recomendação para que seja testado com um banco de dados maior e com ainda mais variedades em tipos de anemia, para que possamos implementar a mesma rede e adicionarmos recursos que permitam, além de julgar um paciente como anêmico ou saudável, possamos também identificar que tipo de anemia esse paciente sofre.

Essas informações, sendo prontamente disponíveis ao paciente, aplicarão a ansiedade quanto ao intervalo entre a coleta do exame e um diagnóstico médico, podendo ainda mostrar certa urgência em buscar assistência médica especializada ou/e constituir uma ferramenta de auxílio aos médicos na avaliação de casos que necessitam um diagnóstico mais complexo.

Agradecimentos

Agradecemos a clínica do Hospital Pio XII por acolher nosso projeto, principalmente às funcionárias Cinthya Alves e Gleicy Kellen Arante por seu auxílio no fornecimento dos exames. Agradecemos ao mestrando em medicina da Universidade Estácio, Helder Figueira, por ter se interessado no projeto e disponibilizado seu tempo e dedicação para fornecer os diagnósticos para os exames utilizados e ao apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

Referências

ALEGRE, S.;CARVALHO, O. **Como diagnosticar e tratar Anemias**. [S.I.]: Virtual Books, 2009. Disponível em: <www.moreirajr.com.br>. Acesso em: 06 out. 2018, 16:47.

JUNIOR, C. **Docente da UFERJ**: Utilização de Redes neurais Artificiais no Auxílio à Detecção do Câncer de Pele. 2008. Dissertação (Mestrado) - Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2008.

MATSUNAGA, V. **Curso de Redes Neurais utilizando o Matlab**. [S.I.]: Virtual Books, 2012. Disponível em: <www.mathworks.com>. Acessado em: 07 set. 2018, 17:00.

ROCHA, M.. **Discentes da Universidade de Lisboa**: Anemias: Caracterização e implicações em medicina dentária. 2011. Dissertação (Mestrado integrado) - Faculdade de Medicina Dentária, Universidade de Lisboa, Lisboa, 1997.

Análise e Consideração do Aprendizado de Cálculo Diferencial e Integral por Alunos da Engenharia Mecânica

Arthur Farias Silva

*Instituto Federal do Espírito Santo, Campus São Mateus
arthurfarias1998@hotmail.com*

Mara Cristina Ramos Quartezani

*Instituto Federal do Espírito Santo, Campus São Mateus
marac.ifes@gmail.com*

Otívo José Junior

*Instituto Federal do Espírito Santo, Campus São Mateus
otivinho@hotmail.com*

Samuel Inácio Batista Lima

*Instituto Federal do Espírito Santo, Campus São Mateus
samuel.inacio.af@gmail.com*

Werley Gomes Facco

*Instituto Federal do Espírito Santo, Campus São Mateus
werleyfacco@ifes.edu.br*

Resumo: Este trabalho pretende identificar o que pode contribuir para as dificuldades de aprendizado apresentadas pelos estudantes do curso de Engenharia Mecânica do Ifes Campus São Mateus, referente a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, identificando e analisando as causas que os afligem, as quais vêm provocando alto índice de reprovação como também desistência ou evasão. Pretende-se descobrir através de questionários, as possíveis causas das reprovações e ou desistências dos alunos. Este artigo tem ainda a intenção de contribuir com a instituição no sentido de apresentação dos dados às equipes que coordenam o curso. Os dados aqui discutidos serão apresentados ao setor pedagógico e coordenação do curso, para que em parceria com o corpo docente sejam estabelecidas estratégias didático-pedagógicas que visem a melhoria das dificuldades de aprendizado dos estudantes do referido curso.

Palavras-chave: Dificuldades em cálculo. Problemas de Aprendizagem. Cálculo Diferencial e Integral. Ensino de Matemática.

Introdução

No que se diz respeito aos cursos de Ciências Exatas em todo o Brasil, muito se é comentado sobre as disciplinas de cálculo, e o quanto os alunos têm encontrado dificuldade para alcançar bom desempenho nessas disciplinas. Em função disso, são atribuídos a elas as altas taxas de reprovação e os grandes índices de evasão nos referidos cursos.

Tanto se é discutido em meio acadêmico que já foi tema de muitos trabalhos de autores como: CURY (2000), ALMEIDA (2006), SILVEIRA (2002), além de muitos outros, com intuito de mapear as dificuldades dos estudantes e apresentar alguma proposta na tentativa de diminuir as taxas de reprovação e de evasão.

A dificuldade na disciplina de matemática não é percebida apenas no Ensino Superior, mas desde as bases do ensino (fundamental e médio) é real a defasagem dos estudantes. As dificuldades se dão não apenas pela complexidade da matéria aplicada, mas também por fatores externos à sala de aula. Tais fatores podem ser, mentais, psicológicos, pedagógicos entre outros. (ALMEIDA, 2006).

De acordo com Rafael Monaco (2013) em sua reportagem acerca de uma pesquisa da CNI (Confederação Nacional da Indústria), as taxas de evasão são altas. “mais da metade dos estudantes ingressantes abandonam os cursos de engenharia”, mesmo aumentando a quantidade de vagas para tais cursos, crescem exponencialmente a cada ano num ritmo acelerado a quantidade de desistentes. A média de evasão entre os anos 2001 e 2011 chegou a 55,59%, e entre as principais causas está a falta de formação básica em matemática.

O Brasil apresenta imensas deficiências no sistema educacional haja vista que as políticas educacionais não vinculam-se à uma política de diminuição da condição de miséria a que vivem muitas famílias brasileiras. Além disso, apesar de avanços nas ações e políticas de formação de professores, ainda são percebidas deficiências na formação inicial e continuada, o que contribui para a qualidade do ensino. Gadelha (2017) corrobora com essas afirmações, acrescentando que há falta de investimento na educação, o que contribui consideravelmente nos índices de desenvolvimento da educação.

Em contraponto à economia, temos a classificação do país no PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos), um programa que avalia o desempenho escolar mundial e aponta melhorias nos métodos educacionais em vários países.

Segundo MORENO (2016), o Brasil se encontra com baixas colocações em todas as áreas, longe dos países desenvolvidos e atrás dos países em desenvolvimento, um dado preocupante para nossa infraestrutura educacional.

Isso se deve a fatores como o baixo investimento do PIB em educação (menos de 10% do PIB brasileiro é investido em educação), e mesmo com um PIB alto, o número elevado de alunos faz com que essa quantia se dilua, se tornando baixo o investimento por aluno (BANDEIRA, 2014).

Todos esses problemas ocorridos no ensino básico da população, afeta drasticamente o aprendizado dos alunos, prejudicando o seu futuro educacional e profissional. Como consequência, na faculdade ocorrem altos índices de reprovação, principalmente nos primeiros períodos (SILVA et al, 2007, apud GASPARIN, KESTRING, WEBER, 2015).

Análise dos dados

Para que seja possível analisar os dados da presente pesquisa, se faz necessária a definição de uma metodologia de investigação de fatos sociais. Foi utilizado como bibliografia, o livro “Métodos e Técnicas de Pesquisa Social”, autoria de Antônio Carlos Gil.

Aliam-se então dois dos métodos de investigação citados por Gil em seus capítulos iniciais. Um método que permite análise lógica dos dados e outro que permite a análise técnica da pesquisa realizada. Esses são: o método dedutivo e o método estatístico.

Com o método dedutivo, proposto pelos racionalistas Descartes, Spinoza e Leibniz, é possível que se chegue a conclusões sobre os dados utilizando a lógica *top-down*, onde se aplicam conceitos ditos verdadeiros a casos particulares. É um método derivado da lógica de Aristóteles, caracterizada pelo rigor e exatidão.

O método estatístico tem como base a aplicação da teoria estatística da probabilidade, tornando possível a análise de dados de forma numérica. Aplica-se a essa metodologia, técnicas de coleta de dados, como questionários ou entrevistas, métodos de inferência estatística sobre a população em estudo através da análise das respostas obtidas. Esse método fornece conclusões que podem representar, de forma fiel, a opinião da população.

A presente pesquisa, utilizou para obtenção dos dados, um formulário contendo questões objetivas e discursivas chegando ao total de dez (10) questões. O formulário foi aplicado de forma eletrônica aos alunos cursistas das turmas da Engenharia Mecânica, do Instituto Federal do Espírito Santo - Ifes - *Campus* São Mateus. Foram obtidas respostas referentes a 70 participantes, de um total de **219** alunos, representando aproximadamente **31.9%** do total.

No início do questionário, foram separados os alunos que apresentam dificuldade nas disciplinas que envolvem cálculo dos que não apresentam. Apenas 34,3% dos entrevistados disseram não ter dificuldade, sendo assim 65,7% dos alunos apresentam dificuldades nessas disciplinas. Em seguida, o questionário se encerrou para aqueles que não possuíam dificuldade, a fim de que fosse analisado o real motivo das dificuldades dos alunos.

APRESENTA DIFICULDADE NAS MÁTERIAS QUE ENVOLVEM CÁLCULO

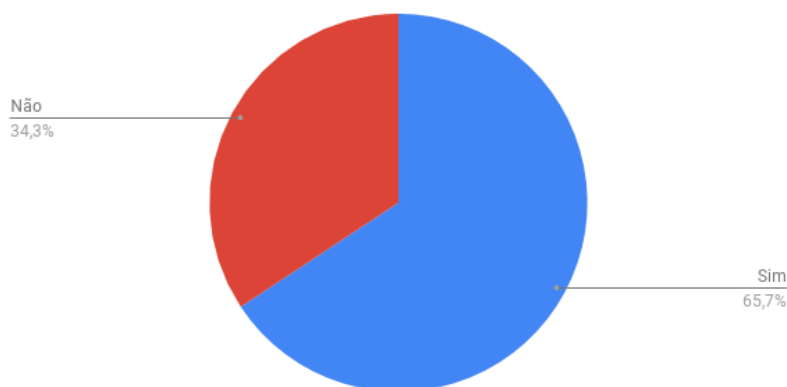


Gráfico 1: Pessoas com dificuldade em cálculo

A seguir, o questionário buscava descobrir a quais motivos os entrevistados atribuíam às suas dificuldades.

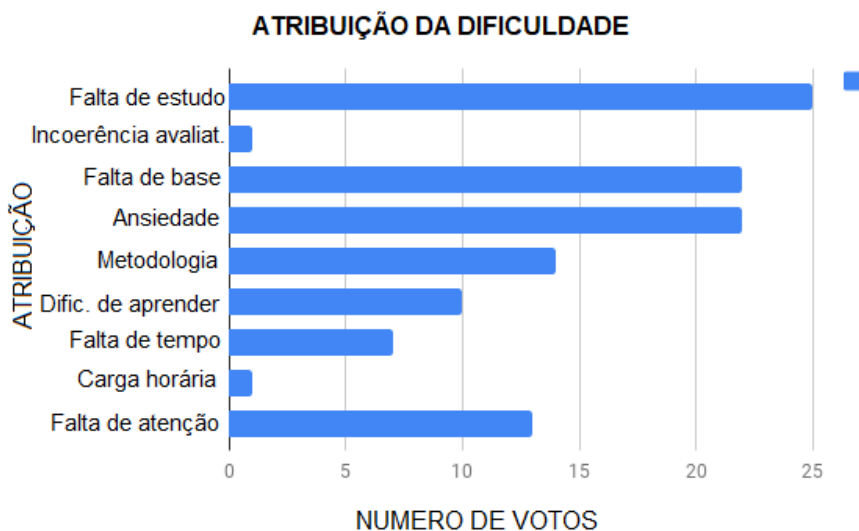


Gráfico 2: Principais dificuldades em Cálculo.

- Com 25 respostas, os alunos atribuíram a dificuldade à falta de estudo, isto é, mais da metade dos estudantes entrevistados assumem não estudar o suficiente para obter bons resultados. Muitas vezes, isso se dá pelo fato dos mesmos não conseguirem se adequar ao ritmo de estudo exigido pelo Ensino Superior.
- Os 22 respostas demonstram ser a ansiedade e a falta de base matemática. A ansiedade, considerada por muitos especialistas como o “mal do século”, afeta muitos jovens dentro das universidades. O medo de não conseguir tirar boas notas e ser retido nas disciplinas são razões que levam à ansiedade, que atrapalha o rendimento nas provas e prejudica o aprendizado do estudante.

- A falta de base matemática, indicada por 22 alunos, pode ser associada ao ensino público precário no país, pois estes chegam ao ensino superior com defasagem nos conteúdos dos ensinos fundamental e médio.
- A metodologia inadequada utilizada pelos professores foi citada em 14 (quatorze) respostas, mostrando fatores didáticos pedagógicos contribuem para as dificuldades de aprendizagem em matemática. A falta de didática dos professores é um motivo que leva os alunos à não compreensão do conteúdo, tendo que se dedicar mais para aprenderem sozinhos, estudando com base em livros e em materiais online. Há casos em que o professor não mantém um bom relacionamento com os alunos, o que contribui para o estudante não tirar as dúvidas que possui na presença do professor, buscando outros meios de fazê-la..
- Com 10 respostas, há alunos que indicaram a dificuldade de aprendizagem, que pode ter uma causa biológica ou até mesmo ocorrer devido a conflitos pessoais ou familiares.
- A falta de tempo é um motivo relatado com 6 respostas, e pode ser associado aos estudantes que trabalham, e por isso têm menos tempo para se dedicarem às suas atividades escolares, mas também pode ser associado aos alunos que não conseguem organizar seu tempo de forma eficiente.
- Um estudante associou sua dificuldade ao fato da carga horária do curso ser extensa, tendo como consequência o cansaço e a falta de atenção, aliado a isso foi apresentado a incoerência do professor nos conteúdos aplicados nas avaliações, como também a cobrança incoerente das avaliações, sendo que o que não foi ministrado em sala exigido.
- A falta de atenção foi dita como motivo em 16 respostas de estudante. Isso pode ser associado ao cansaço, já que as disciplinas que envolvem cálculo têm carga horária extensa.

Para solucionar o problema com as dificuldades em Cálculo, foi perguntado aos estudantes se a oferta de uma disciplina pré-cálculo poderia minimizar os problemas enfrentados com a disciplina Cálculo I. As respostas a esta questão apresentam-se no Gráfico 3.

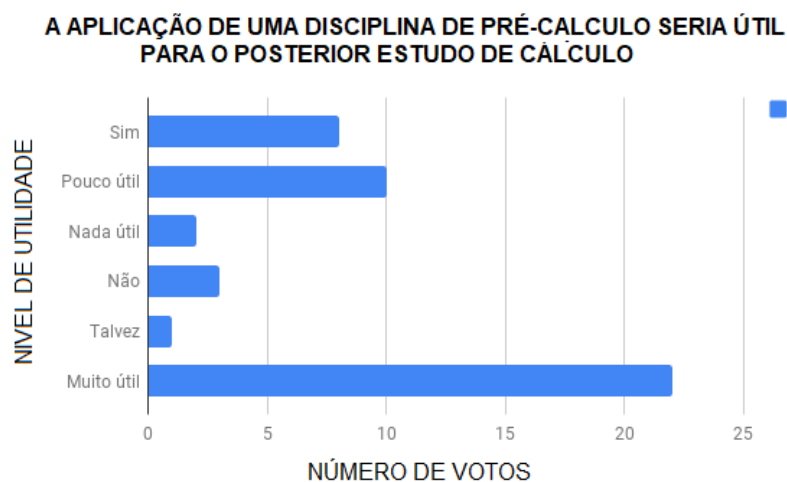


Gráfico 3: Aplicação de Pré-cálculo.

Quando perguntado sobre a aplicação de uma matéria de Pré-cálculo antes das disciplinas que envolvem cálculo, 65,2% dos alunos disseram que seria muito útil, 21,7% pouco útil, 10,8% acreditam que não seria útil e 2,2% que talvez.

Quando perguntado se ações institucionais podem mudar o quadro de dificuldade nas matérias de cálculo, apenas 4,3% dos entrevistados responderam que não, 41,3% responderam que talvez e 54,3% que sim.

Os entrevistados deixaram sugestões significativas para ações institucionais, as quais podemos destacar:

“A oferta da disciplina de Pré-cálculo seria uma medida de curto prazo já que o sistema de educação pública não é tão simples de mudar! Testá-la seria uma forma de validar se realmente é eficaz, já que a faculdade continuará recebendo essa galera com defasagem na base”.

“Encontrar um meio para que o aluno consiga visualizar a matemática acontecendo, ou seja, buscar mais aplicações práticas do que está sendo ensinado.”

“Talvez um acompanhamento com psicólogos do Ifes pudesse ajudar, principalmente os alunos com problemas de ansiedade. Um trabalho conjunto dos psicólogos e dos professores seria de grande valia.”

“Fornecer no mínimo 2 professores por disciplina, alternando a metodologia de ensino a cada ciclo da matéria.”

De maneira simples foram obtidas, dos estudantes participantes da pesquisa, sugestões de ações institucionais que poderiam ser realizadas a fim de reduzir as dificuldades em cálculo. Entre outras, as mais citadas foram: uma disciplina Pré-cálculo com intuito de nivelar o conhecimento matemático dos ingressantes, reduzindo a defasagem gerada pelos ensinamentos fundamental e médio; acompanhamento psicológico para alunos com problemas de ansiedade; Alternância de professores na disciplina, proporcionando mudança de metodologia de ensino empregada.

Conclusões

Com base nos indicadores do PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos), constatamos uma falha na base educacional brasileira e acrescentada com os dados de evasão do CNI (Confederação Nacional da Indústria), pode-se notar que o ensino superior brasileiro vem sendo prejudicado por inúmeros fatores como falta de base do Ensino Médio, problemas emocionais, dificuldades de aprendizagem, falta de hábitos de estudos, deficiência na formação dos professores, dentre outros, o que têm dificultado a formação dos estudantes no tempo regular do curso.

A partir desse trabalho, foi possível, coletar e analisar as opiniões sobre as dificuldades que afetam os estudantes em matérias que envolvem cálculo dos graduandos em Engenharia Mecânica do Instituto Federal do Espírito Santo *Campus* São Mateus quanto às dificuldades de aprendizagem nas disciplinas iniciais do curso na área de Matemática sobre os cálculos, assim como diagnosticar os motivos da dificuldade encontrada em cálculo, as quais, segundo essa pesquisa, se apresentam na falta de dedicação no estudo para a referida matéria, a falta de base educacional que dificulta o aprendizado e a ansiedade pré-prova que desestabiliza o estudante. Outro ponto relevante na pesquisa foram os fatores externos pessoais e/ou familiares que também interferem no desempenho.

De maneira sistematizada, obteve-se dos estudantes participantes sugestões de ações institucionais que podem ser realizadas a fim de uma possível redução nas dificuldades em cálculo. As ações sugeridas pelos estudantes podem ser um norteador institucional para a discussão de implementação de tais estratégias, podendo ser objetivo de análise nas Reuniões Pedagógicas envolvendo setor pedagógico e docentes.

Além das sugestões já pontuadas, a formação de duplas entre estudantes com notas mais altas na disciplina de Cálculo com os de menores notas, o contato aluno-aluno pode ser mais proveitoso do que somente o contato professor-aluno.

Além das ações institucionais um aspecto que nos alertou foi o fato de que muitos alunos responderam que o fator que os influencia a ter um baixo desempenho nas matérias de cálculo é a falta de estudo, o que se torna algo de extrema preocupação e digno de análise, visto que nenhuma ação institucional será efetiva se o estudante não ter uma carga horária mínima de estudos fora da sala de aula. Não adianta a escola e os professores terem um foco visando o combate ao baixo desempenho se os alunos não tiverem realmente o empenho para acabar com a defasagem. É preciso que escola e

estudantes ajam em conjunto para superação das dificuldades e sugestões de melhoria do trabalho e da prática pedagógica. Assim, atribuindo significado à sua função enquanto estudante e tornando-se parte do processo, é possível que as problemáticas relacionadas à aprendizagem diminuam.

Outro fator importante refere-se a que muitos alunos acabam não se identificando com o curso, ou não tendo um bom desempenho nas matérias que envolvem cálculo, o que não desqualifica-os, apenas mostra que eles possuem possibilidades de desenvolvimento de competências e habilidades em outras áreas de estudo. Comumente o estudante escolhe sua área de estudo sem uma análise prévia ou até mesmo influenciados por familiares, o que favorece as dificuldades de acompanhamento do curso.

As ações institucionais aliadas com a carga mínima de esforço e de estudo dos alunos com dificuldade tem um potencial para diminuição das taxas de reprovação e grande rendimento dos alunos nas matérias, trazendo um menor tempo de graduação, menor taxa de evasão e maior conhecimento adquirido pelos estudantes.

Ousamos dizer que as sugestões dadas nesta pesquisa pelos estudantes, são inovadoras e de grande contribuição, pois elas são frutos de realidades e experiências pessoais. Pretendemos com elas, propor uma análise conjunta com o setor pedagógico do Instituto Federal do Espírito Santo *Campus São Mateus* e equipe docente com intuito de criar novas estratégias e práticas que visam amenizar o problema apresentado.

Agradecimentos

Esse trabalho possui suporte em parte pela FAPES, FAPEMIG, CNPq e CAPES.

Referências

ALMEIDA, Cíntia Soares de. **Dificuldades de aprendizagem em matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao Insucesso nesta área**. Brasília (DF): curso de Graduação em Matemática, Universidade Católica de Brasília; 2006.

BANDEIRA, Luiza. **Brasil dá mais do PIB para educação que países ricos, mas gasto por aluno é pequeno**. Disponível em: <http://www.bbc.com/portuguese/noticias/2014/09/140908_relatorio_educacao_lab> Acessado em: 04 dez. 2017.

CURY, Helena Noronha. **Estilos de aprendizagem de alunos de engenharia**. XXVIII COBENGE, Ouro Preto, MG, Brasil, 2000.

GADELHA, Regina Maria A. Fonseca. Educação no Brasil: Desafios e crise institucional. **Pesquisa & Debate**: São Paulo, v. 28, n. 1, jul. 2017.

GASPARIN, Priscila Pigatto; KESTRING, Franciele Buss Frescki; WEBER, Pedro Elton. **Diagnóstico da proficiência de matemática em alunos ingressantes de engenharia e licenciaturas da UTFPR – Medianeira**. V Seminário Nacional Interdisciplinar em Experiências Educativas. 20 de maio de 2015.

MORENO, Ana Carolina. **Brasil cai em ranking mundial de educação em ciências, leitura e matemática**. Disponível em: <<https://g1.globo.com/educacao/noticia/brasil-cai-em-ranking-mundial-de-educacao-em-ciencias-leitura-e-matematica.ghtml>> Acesso em: 04 de dezembro 2017.

SILVEIRA, Marisa Rosâni da. **“Matemática é difícil”: Um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos.** Anais da 25ª Reunião anual da ANPED, 2002.

Multiscale finite element method combined with local preconditioning for solving Euler equations

Sérgio Souza Bento

Departamento de Matemática Aplicada - UFES, São Mateus

sergio.bento@ufes.br

Leonardo Muniz de Lima

Instituto Federal do Espírito Santo - IFES, Aracruz

lmuniz@ifes.edu.br

Lucia Catabriga

Departamento de Informática - UFES, Vitória

luciac@inf.ufes.br

Isaac P. Santos

Departamento de Matemática Aplicada - UFES, São Mateus

isaac.santos@ufes.br

Abstract: In this work we present a nonlinear multiscale finite element method combined with local preconditioning for solving compressible Euler equations in conservative variables. The formulations are based on the strategy of separating scales, in which it is the core of the variational multiscale (finite element) methodology. The subgrid scale space is defined using bubble functions that vanish on the boundary of the elements, allowing to use a local Schur complement to define the resolved scale problem. The resulting numerical procedure allows the fine scales to depend on time. The formulation proposed added artificial viscosity isotropically in all scales of the discretization. Due to the fact that, density-based schemes suffer with undesirable effects of low speed flow including low convergence rate and loss of accuracy, local preconditioning is applied to the set of equations in the continuous case. We evaluate the multiscale formulation with local preconditioning in the low Mach number comparing with the non-preconditioned case. The experiments show that density-based schemes combined with local preconditioning yields good results.

Keywords: Multiscale formulation. Local preconditioning. Euler equations. Conservative variables.

Introduction

There are many challenges in developing numerical methods for solving problems from low to high speed compressible flows. As an example, flows at a low speed show an incompressible behavior, because the density variation is almost negligible. Numerical methods addressed for solving low speed are usually pressure-based, since the flow is approaching to the incompressibility. On the other hand, in transonic and supersonic regimes the numerical methods generally are density-based. It is known that density-based strategy to solve compressible flow suffers severe deficiencies when applied to very low Mach number problems, degrading convergence speeds, and impacting the efficiency and accuracy of the numerical formulations (LI; XIANG, 2013). In the low Mach number limit the system of Euler equations becomes stiff due to large disparity in the timescales (BASSI et al., 2009).

With some adjustments, numerical methods can handle the full spectrum of speeds, as well as situations where the density does not change. Local preconditioning or mass matrix preconditioning schemes have been proposed as a way to address this drawback using density-based method for low-Mach number flow, whose goal is to get an uniformization of the eigenvalues, smoothing the discrepancy of the time scales (COLIN; DENIAU; BOUSSUGE, 2011; GINARD; VÁZQUEZ; HOUZEAUX, 2016). Local preconditioning is applied to the set of continuous differential equations premultiplying the time derivative by a suitable preconditioning matrix. However, the original problem and the preconditioned one have different time evolution but the same steady-state solution. The application of these methodologies to

unsteady problems requires the use of the “dual-time-stepping” technique (LOPEZ et al., 2012), in which the physical time derivative terms are treated as source and/or reactive terms.

In this work we use the Van Leer-Lee-Roe (VLR) preconditioner, proposed in (LEER; LEE; ROE, 1991) for Euler steady flow. The VLR preconditioner is symmetric and optimal, in the sense that it equalizes the eigenvalues of the problem for all Mach number regimes. We apply local preconditioning in the Euler equation and after that the continuous equations are discretized by a nonlinear multiscale viscosity method proposed in (BENTO et al., 2016).

Governing equations

We consider the two-dimensional compressible Euler equations for an ideal gas. The equations may be written in conservative variables without source terms as a system of conservation laws,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad \text{in } \Omega \times (0, t_f], \quad (1)$$

where t_f is a positive real number, representing the final time and Ω is a domain in $\mathbb{R}^2$, with boundary Γ , $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^4$ is the vector of conservative variables, and $\mathbf{F}(\mathbf{U}) \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$, is the Euler flux vector. Here,

$$\mathbf{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}}_{\text{conservative variables}} = \rho \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ E \end{bmatrix}}_{\text{primitive variables}}, \quad (2)$$

where ρ is the fluid density, $\mathbf{u} = [u \ v]^T$ is the velocity vector, ρE is the total energy, and E is the total specific energy. Others important physical quantities are the pressure p and the Mach number, $M = \frac{\|\mathbf{u}\|_2}{c}$, where $c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ is the speed of sound, with $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ ($\gamma > 1$) being the ratio of specific heats, and c_p and c_v are the coefficients of specific heat at constant pressure and volume, respectively. The system of equations (1) is closed by the equation of state for pressure

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|_2^2 \right). \quad (3)$$

Alternatively, Eq. (1) can be rewritten as in the quasi-linear form:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad \text{in } \Omega \times (0, t_f], \quad (4)$$

where $\mathbf{A}_x = \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial \mathbf{U}}$ and $\mathbf{A}_y = \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial \mathbf{U}}$ are the Jacobian matrices. Associated with Eq.(4) we have an appropriate set of boundary and initial conditions. We assume the following boundary and initial conditions,

$$\mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{Z}, \quad \text{on } \Gamma \times (0, t_f], \quad (5)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_0, \quad (6)$$

where $\mathbf{B}$ denotes a general boundary operator, and $\mathbf{Z}$ and $\mathbf{U}_0$ are given functions.

Multiscale finite element discretization

To define the finite element method, we consider a triangular partition $\mathcal{T}_h$ of the domain Ω into nel elements, where

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{nel} \Omega_e \quad \text{with} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad \text{for } i, j = 1, 2, \dots, nel \quad \text{and} \quad i \neq j.$$

In order to define the multiscale finite element methods, we introduce the function space $\mathcal{V}_{Zhb}$, which is written as the direct sum,

$$\mathcal{V}_{Zhb} = \mathcal{V}_{Zh} \oplus \mathcal{V}_b, \quad (7)$$

where the subspaces $\mathcal{V}_{Zh}$ and $\mathcal{V}_b$ are given by

$$\mathcal{V}_{Zh} = \{\mathbf{U}_h \in [H^1(\Omega)]^4; \quad \mathbf{U}_h|_{\Omega_e} \in [\mathbb{P}_1(\Omega_e)]^4, \mathbf{B}\mathbf{U}_h = \mathbf{Z} \text{ on } \Gamma_D\}, \quad (8)$$

$$\mathcal{V}_b = \{\mathbf{U}_b \in [H_0^1(\Omega)]^4; \quad \mathbf{U}_b|_{\Omega_e} \in [span(\psi_b)]^4, \quad \forall \Omega_e \in \mathcal{T}_h\}, \quad (9)$$

with $\mathbb{P}_1(\Omega_e)$ representing the set of first order polynomials in Ω_e , $H^1(\Omega)$ denotes the Sobolev space of square-integrable functions whose first derivatives are also square-integrable, $H_0^1(\Omega)$ is a space of function in $H^1(\Omega)$ that vanish at the boundary of Ω , and ψ_b is a bubble function. The space $\mathcal{V}_{Zh}$ represents the resolved (coarse) scale space whereas $\mathcal{V}_b$ stands for the subgrid (fine) scale space. The space defined in (7) with $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ on Γ_D is written as $\mathcal{V}_{0hb} = \mathcal{V}_{0h} \oplus \mathcal{V}_b$.

The nonlinear multiscale method used here can be found in (BENTO et al., 2016), which is referred to as NMV (Nonlinear Multiscale Viscosity) method. Those method adds artificial viscosity isotropically in all scales of the discretization, where the amount of artificial viscosity is given by the YZ β shock-capturing viscosity parameter, as described in (TEZDUYAR; SENG, 2006). The NMV method for the Euler equation consists of finding $\mathbf{U}_{hb} = \mathbf{U}_h + \mathbf{U}_b \in \mathcal{V}_{Zhb}$ with $\mathbf{U}_h \in \mathcal{V}_{Zh}$, $\mathbf{U}_b \in \mathcal{V}_b$ such that

$$\underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{W}_{hb} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}_{hb}}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}_{hb}}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}_{hb}}{\partial y} \right) d\Omega}_{\text{Galerkin term}} + \underbrace{\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \delta_h(\mathbf{U}_h) \left(\frac{\partial \mathbf{W}_{hb}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_{hb}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}_{hb}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_{hb}}{\partial y} \right) d\Omega}_{\text{Nonlinear stabilization term in all scales}} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{W}_{0hb} \in \mathcal{V}_{hb}, \quad (10)$$

where $\mathbf{W}_{hb} = \mathbf{W}_h + \mathbf{W}_b \in \mathcal{V}_{0hb}$ with $\mathbf{W}_h \in \mathcal{V}_{0h}$, $\mathbf{W}_b \in \mathcal{V}_b$ and the amount of artificial viscosity, $\delta_h(\mathbf{U}_h)$, is calculated on the element-level by using the YZ β shock-capturing viscosity parameter (TEZDUYAR; SENG, 2006),

$$\delta_h(\mathbf{U}_h) = \|\mathbf{Y}^{-1} R(\mathbf{U}_h)\| \left(\sum_{i=1}^2 \left\| \mathbf{Y}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial x_i} \right\|_2^2 \right)^{\frac{\beta}{2}-1} \|\mathbf{Y}^{-1} \mathbf{U}_h\|^{1-\beta} h^{\beta}, \quad (11)$$

where

$$R(\mathbf{U}_h) = \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial y} \quad (12)$$

is the residue of the problem on Ω_e , $\mathbf{Y}$ is a diagonal matrix constructed from the reference values of the components of $\mathbf{U}$, given by

$$\mathbf{Y} = \text{diag}((U_1)_{\text{ref}}, (U_2)_{\text{ref}}, (U_3)_{\text{ref}}, (U_4)_{\text{ref}}), \quad (13)$$

h is the local length scale defined as follow $h = (\sum_{a=1}^3 |\mathbf{j} \cdot \nabla N_a|)^{-1}$, $\mathbf{j}$ is a unit vector defined as $\mathbf{j} = \nabla \rho / \|\nabla \rho\|_2$ and N_a is the interpolation function associated with node a . It is important to note that, the local length h is defined automatically taking into account the directions of high gradients and spatial discretization domain.

Local preconditioning for the Euler equations

A system of differential algebraic equations (DAE) is *stiff* due to the large disparity in their timescales (KNOLL; KEYES, 2004). In the same way, the system of the compressible Euler equations is also stiff if it covers a wide range of timescales (BASSI et al., 2009). In the context of conservation laws, precisely, compressible Euler equations, the *stiffness* is measured through of the disparities related to the characteristic propagation speeds of the system, that are given by the eigenvalues of the Euler flux Jacobian (LOPEZ et al., 2012; GINARD; VÁZQUEZ; HOUZEAUX, 2016). Stiffness causes convergence problems regardless of the discretization method utilized, and it is measured (for one and two dimensions) by the so called condition number (GINARD; VÁZQUEZ; HOUZEAUX, 2016),

$$\kappa = \begin{cases} \frac{M+1}{M}, & \text{if } M < 1/2; \\ \frac{M+1}{1-M}, & \text{if } 1/2 \leq M \leq 1; \\ \frac{M+1}{M-1}, & \text{if } M > 1. \end{cases} \quad (14)$$

When $M \rightarrow 0$ or $M \rightarrow 1$, the condition number $\kappa \rightarrow \infty$ and the problem (4) becomes stiff. A strategy to reduce the disparity between the eigenvalues of the problem (4) and consequently decrease the condition number is the use of local preconditioning or preconditioning mass matrix schemes.

Local preconditioning or preconditioning mass matrix scheme consists of premultiplying the time derivatives by a properly matrix in order to uniform the eigenvalues, smoothing the discrepancy of the different time scales. It is applied to the set of continuous equations before any discretization is done. Denoting by $\mathbf{P}$ the (nonsingular) preconditioning matrix, then the system of equations (4) after the preconditioning process reads

$$\mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{0} \implies \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{P} \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{P} \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{0}, \text{ in } \Omega \times (0, t_f]. \quad (15)$$

Even the solution evolves in time differently from that of the original problem, the time derivatives go to zero and (4) and (15) will share the same steady-state solution. We described below a local preconditioner technique: the VLR.

Van Leer-Lee-Roe preconditioner

The *Van Leer-Lee-Roe's* (VLR) preconditioner for the Euler equations was introduced in (LEER; LEE; ROE, 1991) using the symmetrizing variables with the streamline coordinates. The resulting preconditioning matrix satisfies some properties as *optimality*, *accuracy*, *continuity at the sonic point*, *preservation of the decoupled entropy equation*, *positivity*, and *symmetrizability*. The VLR preconditioner is considered optimal because it equalizes the eigenvalues of the system for all Mach numbers (COLIN; DENIAU; BOUSSUGE, 2011). An explicit expression for the VLR preconditioner in conservative variables (GINARD; VÁZQUEZ; HOUZEAUX, 2016) is

$$\mathbf{P}_{VLR} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 u & a_2 v & a_3 \\ a_4 u & a_5 u u + \tau & a_5 u v & a_6 u \\ a_4 v & a_5 u v & a_5 v v + \tau & a_6 v \\ a_7 & a_8 u & a_8 v & a_9 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

All coefficients definitions of the Eq. (16) can be found in (GINARD; VÁZQUEZ; HOUZEAUX, 2016).

Numerical results

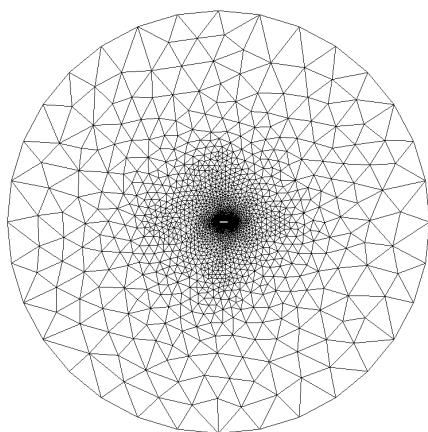
The flow over an airfoil is an interesting problem to examine the numerical instability coming from Mach numbers variations, that occurs in the Euler equations. This section shows the results of a flow

passing through a NACA 0012 airfoil at an angle of attack of 0° and inflow Mach number from 0.01 up to 0.5.

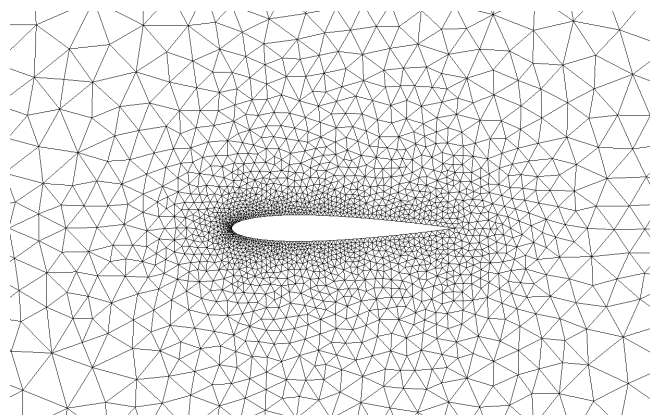
An unstructured triangular mesh of 5,606 elements and 2,886 nodes was used for the simulation, in the computational domain given by a circle centered at the $(0,0)$ with radius 15 (Fig. 1). A distance is taken ahead the leading edge of the airfoil to the inflow and outflow boundaries in order to avoid numerical instabilities of reflecting waves (GINARD; VÁZQUEZ; HOUZEAUX, 2016). The inflow data is set up by

$$\text{inflow} \quad \begin{cases} \rho &= 1.0 \\ u &= 1.0 \\ v &= 0.0 \\ T &= 1.0 \end{cases}, \quad (17)$$

where T is the temperature. As in (GINARD; VÁZQUEZ; HOUZEAUX, 2016), the coefficients c_v and c_p are set to obtain the desired inflow Mach numbers. The numerical solution is advanced in time by



(a) NACA 0012 mesh



(b) Detail of the NACA 0012 airfoil

Figure 1: Unstructured triangular mesh of 5,606 elements and 2,886 nodes.

the predictor-corrector algorithm adapted for the multiscale framework in (BENTO et al., 2016) for the Euler equations. A restarted version of the GMRES solver is used to find the solution of the linearized system in each nonlinear and time iterations. The GMRES parameters are: 30 vectors to the restart process and tolerance equals 10^{-5} . The time-step size is 10^{-3} and the simulation runs until $t_f = 20.0$ (20,000 steps), and 3 fixed nonlinear iterations. For the reference values used in Eq. (13), we consider the inflow data given by Eq. (17). In this example, we evaluate the VLR preconditioner comparing it with the non-preconditioned (NP) case. The tests are carried out with the intention of analyzing accuracy issues, specially in the incompressibility limit. Due to flow at a low speed to demonstrate an incompressible behavior, i.e., density variation is almost negligible, we use the pressure contour to analyze this experiments.

Figures 2-5 show the pressure contours for different inflow Mach numbers. The solutions are in good agreement with the solutions found in (GINARD; VÁZQUEZ; HOUZEAUX, 2016), where it is used a first order forward finite difference scheme, with the time step satisfying CFL condition. As happened in the work of (GINARD; VÁZQUEZ; HOUZEAUX, 2016) for the non-preconditioned case, our multiscale methodology does not work in the low Mach number limit, i.e., when the Mach number approaches to zero. We can see in Fig. 2-4, when $M \leq 0.3$, the flow at a low speed demonstrates an incompressible behavior, and methods based on conservative variables suffer with undesirable effects (LI; XIANG, 2013). The numerical solutions in the low Mach number limit are completely oscillatory, e.g. Fig. 2(a). On the other hand, the NMV method local preconditioned is able to solve problems with

an incompressible behavior, as shown in Fig. 2(b), 3(b), and 4(b). It is worth pointing out that the non-preconditioned NMV becomes more stable as the Mach number increases and solutions obtained from $M = 0.3$ are comparable with the preconditioned case.

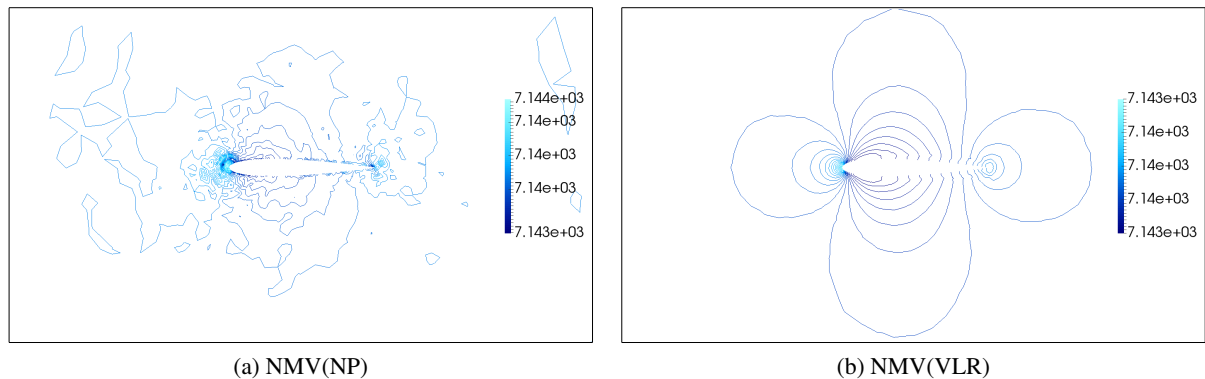


Figure 2: NACA 0012: Pressure contours for $M = 0.01$ at the inflow.

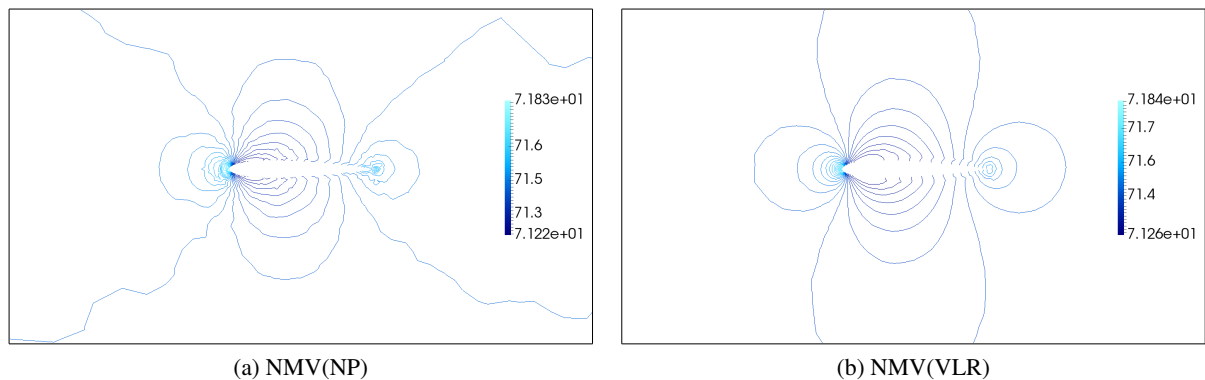


Figure 3: NACA 0012: Pressure contours for $M = 0.1$ at the inflow.

Conclusions

The NMV method combined with VLR preconditioner was applied in the NACA 0012 airfoil problem for the incompressible flow limit. We simulate the flow over the NACA 0012 airfoil under various regimes of inflow Mach numbers: 0.01; 0.1; 0.3; 0.5. The solutions obtained with the NMV without local preconditioning are completely oscillatory in the low Mach number limit (e.g. for $M = 0.01$), showing that methods based on conservative variables fail in this case. On the other hand, the NMV method combined with local preconditioning presents good results, as shown in the numerical results section.

References

- BASSI, F. et al. A discontinuous Galerkin method for inviscid low Mach number flows. **Journal of Computational Physics**, v. 228, n. 11, p. 3996 – 4011, 2009.
- BENTO, S. S. et al. A nonlinear multiscale viscosity method to solve compressible flow problems. In: **Computational Science and Its Applications - ICCSA 2016 - 16th International Conference, Beijing, China, July 4-7, 2016, Proceedings, Part I**. 2016. p. 3–17.

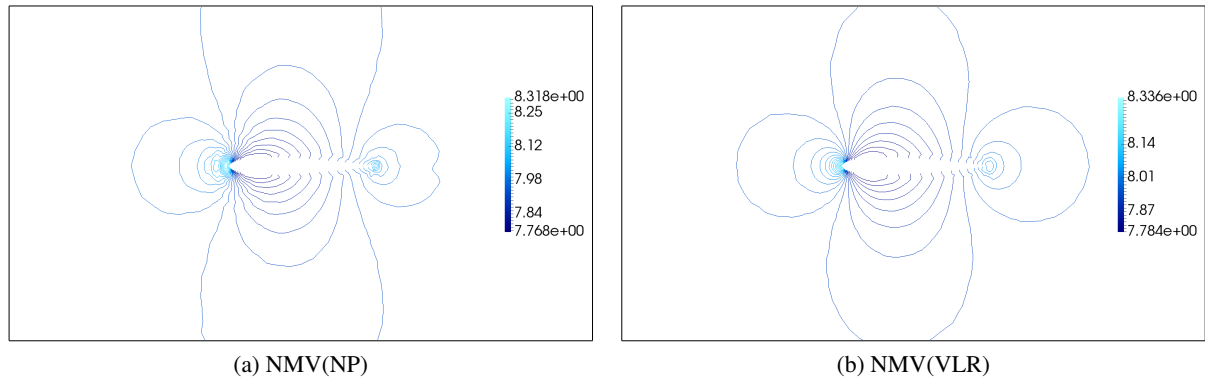


Figure 4: NACA 0012: Pressure contours for $M = 0.3$ at the inflow.

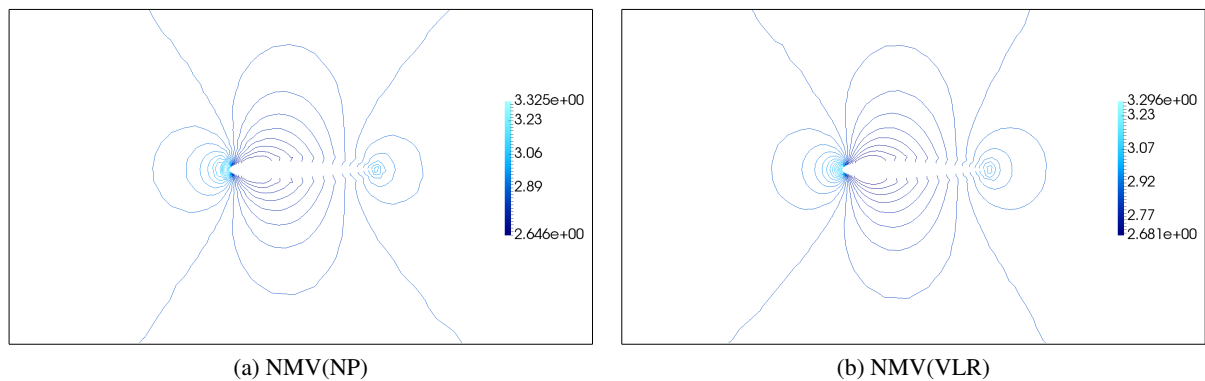


Figure 5: NACA 0012: Pressure contours for $M = 0.5$ at the inflow.

COLIN, Y.; DENIAU, H.; BOUSSUGE, J.-F. A robust low speed preconditioning formulation for viscous flow computations. **Computers & Fluids**, v. 47, n. 1, p. 1–15, 2011.

GINARD, M. M.; VÁZQUEZ, M.; HOUZEAUX, G. Local preconditioning and variational multiscale stabilization for Euler compressible steady flow. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 305, p. 468 – 500, 2016.

KNOLL, D.; KEYES, D. Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications. **Journal of Computational Physics**, v. 193, n. 2, p. 357 – 397, 2004.

LEER, B. V.; LEE, W.-T.; ROE, P. L. Characteristic time-stepping or local preconditioning of the Euler equations. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1991.

LI, Z.; XIANG, H. Development of a Navier-Stokes flow solver for all speeds on unstructured grids. **Engineering Letters**, v. 21, n. 2, p. 89–94, 2013.

LOPEZ, E. J. et al. Stabilized finite element method based on local preconditioning for unsteady compressible flows in deformable domains with emphasis on the low Mach number limit application. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 69, n. 1, p. 124–145, 2012.

TEZDUYAR, T. E.; SENG, M. Stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 13-16, p. 1621–1632, 2006.

Método SPH

Enéas Mendes de Jesus

Instituto Federal do Espírito Santo - IFES

eneas.jesus@ifes.edu.br

Fabiano Petronetto do Carmo

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

fabiano.carmo@ufes.br

José Eduardo Cordeiro

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

eduardocordeiro1@gmail.com

Resumo: Este trabalho é uma apresentação ao método *Smoothed Particle Hydrodynamics* - SPH. O método SPH é um método de partículas totalmente livre de malhas utilizado para definir operadores diferenciais discretos. A ausência de malha na sua formulação permite aplicações em problemas com domínios com geometrias complexas, deformações, etc., onde, do ponto de vista computacional, são menos dispendiosas do que abordagens com métodos que usam malha. Apresentamos inicialmente a formulação básica do método e discutimos detalhes de todos os elementos envolvidos na formulação, desde a escolha do núcleo até as limitações geradas pelo problema de inconsistência de partículas. Em seguida, definimos os operadores diferenciais discretos obtidos pelo método e fazemos uma análise da convergência destes operadores sob condições “ideais”, isto é, em condições de amostragem ótima. Por fim, apresentamos uma aplicação para os operadores discutidos e tecemos alguns comentários gerais.

Palavras-chave: Método sem Malha. Amostragem por Partículas. Operadores Diferenciais Discretos.

Introdução

Introduzido em 1977 nos trabalhos de Lucy (LUCY, 1997) e Gingold e Monaghan (GINGOLD; MONAGHAN, 1977), o SPH é um método de partículas sem uso de malha e de formulação lagrangiana. Inicialmente o método SPH foi utilizado para resolver problemas de astrofísica, mas atualmente já se verifica aplicações nas mais diversas áreas como dinâmica dos fluidos, mecânica dos sólidos e computação gráfica.

No método SPH o domínio de um problema é representado por um conjunto de partículas definidas como pontos que discretizam tal domínio totalmente livre de malha. Cada partícula contém, além da geometria do espaço, outras informações do problema tais como propriedades físicas e dados numéricos/computacionais. Neste trabalho a discretização de operadores diferenciais não está associada a um fenômeno físico, sendo assim apenas propriedades geométricas das partículas são levadas em consideração. Após a discretização do domínio, a discretização numérica para os operadores é obtida usando informações de todas as partículas através de médias locais, assim as partículas também são utilizadas como a estrutura computacional primal para calcular as aproximações necessárias para obter uma solução numérica para o problema.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: apresentamos os principais elementos da formulação básica do método, a saber, o núcleo, o cumprimento suave, a discretização do domínio e os elementos de área discretos; tendo conhecimento destes elementos, discutimos a consistência do método do ponto de vista de sua formulação, apresentamos as limitações geradas pela inconsistência de partículas e apontamos possíveis correções; a partir daí, obtemos algumas versões de operadores diferenciais discretos e analisamos a convergência destes operadores do ponto de vista computacional; por fim, apresentamos uma aplicação para os operadores discutidos e tecemos alguns comentários gerais.

Representação Integral

O conceito de representação integral de uma função em SPH é motivado pela identidade

$$f(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (1)$$

onde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e δ é a “função” delta de Dirac. Uma exposição sobre a igualdade (1) pode ser encontrada no apêndice do (EVANS, 2002).

Definição 1 A representação integral de uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a convolução de f por uma função suave $W_h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_h(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})W_h(\mathbf{u} - \mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (2)$$

A função W_h é conhecida como *núcleo* e o número h é chamado de *comprimento suave* e está relacionado com o suporte da função W_h . Tais funções são aproximações da identidade e, portanto, f_h é uma aproximação para f ($f_h \approx f$).

Representação integral da derivada de uma função

A representação integral da derivada de uma função é definida a partir da representação integral de uma função (2), substituindo a função f por sua derivada f' , obtendo assim

$$f'_h(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} f'(\mathbf{x})W_h(\mathbf{u} - \mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (3)$$

Observe que o lado direito da expressão (3) depende dos valores da derivada. No entanto, isto pode ser contornado utilizando a técnica de integração por partes e propriedades do núcleo. Por simplicidade, considere agora $\Omega = \mathbb{R}$. Neste caso, a equação (3) pode ser reescrita como

$$f'_h(u) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)W_h(u - x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x)W_h(u - x)|_{-t}^t - \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{d}{dx}W_h(u - x)dx.$$

Se o núcleo W_h é definido com suporte compacto, então o primeiro membro do lado direito da igualdade torna-se nulo e é obtida a seguinte expressão para a representação integral da derivada de uma função em $\mathbb{R}$

$$f'_h(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{d}{du}W_h(u - x)dx. \quad (4)$$

Núcleo

Para que uma função seja utilizada como núcleo são necessárias algumas propriedades, a fim de que se tenha um método consistente e preciso. Em geral W_h deve ser uma função suave, com suporte compacto e integral unitária sobre o domínio (propriedade de normalização). Uma maneira sistemática para construir núcleos, bem como as propriedades necessárias, pode ser encontrada em (LIU; LIU, 2003). Destacamos aqui uma dessas propriedades, a saber, a propriedade de simetria radial

$$W_h(\mathbf{u} - \mathbf{x}_1) = W_h(\mathbf{u} - \mathbf{x}_2) \text{ sempre que } \|\mathbf{u} - \mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{x}_2\|. \quad (5)$$

Esta propriedade é importante para que pontos à mesma distância, porém em posições diferentes, exerçam a mesma influência no ponto posicionado no centro do núcleo. Mais ainda, ela permite que este seja calculado efetivamente num domínio paramétrico (em $\mathbb{R}$), uma vez que este leva em consideração apenas as distâncias entre o ponto no qual está centrado e os pontos do seu suporte compacto. Mais precisamente, existe uma função real $W_1 : [0, k] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$W_h(\mathbf{u} - \mathbf{x}) = \alpha_d W_1(R)$$

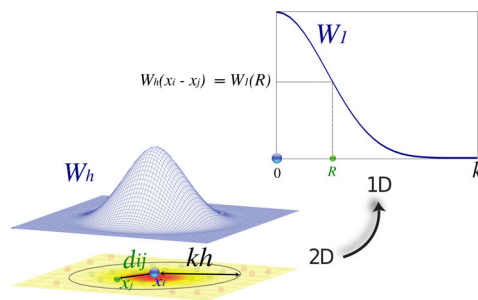


Figura 1: A partir da propriedade de simetria radial o núcleo em dimensão dois é calculado efetivamente em um domínio paramétrico de dimensão um.

onde α_d é uma constante de normalização e $R = \frac{\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|}{h}$ é a distância relativa dos pontos. A Figura 1 ilustra este resultado para o caso em que a dimensão do problema é igual a dois.

Uma análise do comportamento de vários núcleos em uma dimensão pode ser encontrada no trabalho (FULK; QUINN, 1996). Neste trabalho utilizaremos o núcleo *Spline Quíntico* pois este é uma boa aproximação para a função gaussiana e é estável, além de possuir todas as propriedades listadas acima.

Aproximação por Partículas

No método SPH todo o sistema é representado por um número finito de partículas distribuídas no domínio do problema. Tais partículas são definidas como pontos que discretizam o domínio do problema e em geral contêm informações físicas do fenômeno simulado tais como temperatura, densidade, etc. Além disso, as partículas também são utilizadas como a estrutura computacional para calcular as aproximações necessárias para obter uma solução numérica para o problema.

Tendo em vista o domínio discretizado do problema, a aproximação obtida pela representação integral é substituída por um somatório nas partículas que discretizam o domínio e o elemento de área infinitesimal $d\mathbf{x}$ é substituído pelo elemento de área discreto ΔA_j relacionado à uma partícula j que compõe a discretização. Em símbolos

$$f_h(\mathbf{x}_i) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{j \in V_i} f(\mathbf{x}_j) W_h(\mathbf{x}_{ij}) \Delta A_j, \quad (6)$$

onde o somatório percorre todas as partículas que pertencem ao suporte compacto do núcleo W_h centrado na partícula $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$.

A aproximação da função na partícula i é obtida a partir de uma média dos valores da função nas demais partículas ponderadas pelo núcleo. Como o núcleo tem suporte compacto, este cálculo é reduzido às partículas j pertencentes ao seu suporte compacto. O suporte compacto do núcleo depende do comprimento suave h . Este é muito importante na formulação do SPH pois se h é muito pequeno, não existem partículas suficientes no suporte para exercer influência em uma dada partícula, resultando em baixa precisão numérica. Por outro lado, se h é muito grande, propriedades locais serão suavizadas globalmente e a simulação também não será precisa, além de computacionalmente mais cara. Portanto a escolha correta do valor de h está diretamente ligado à eficiência e à precisão numérica do método. Neste trabalho h foi escolhido de modo que cada partícula tenha em média 30 vizinhos.

Elementos de Área

Há na literatura algumas formas de se obter os elementos de área discretos ΔA_j (LIU; LIU, 2003). A maneira mais ingênua decorre do mesmo princípio aplicado à soma de Riemann, onde se divide a área pela quantidade de partículas. Estes são chamados *elementos de área geométricos*. No entanto, esta abordagem apresenta limitações se as partículas não estão distribuídas de maneira bem regular.

Outra possibilidade está relacionada com a propriedade de normalização do núcleo. Uma vez que a integral sobre o domínio é igual a um, na forma discreta teremos o somatório do produto do núcleo pelos elementos de área associado a cada partícula. Como os valores do núcleo nas partículas são conhecidos, obtemos um sistema onde a solução são os *elementos de área numéricos*. Este nome é devido ao fato de que no processo de resolução do sistema alguns elementos assumem valores negativos, o que não condiz com os elementos de área geométrico.

Muito embora os elementos de área numéricos sejam bastante usados na implementação do método, a existência de valores negativos podem influenciar diretamente na convergência do método. Uma possibilidade para evitar tal resultado é utilizar otimização para garantir a positividade, tal abordagem pode ser encontrada em (PETRONETTO et al., 2010).

Consistência do Método SPH

Embora a definição de representação integral não envolva uma discretização do domínio do problema, ela é ainda uma aproximação, pois $W_h = \delta$ apenas quando h tende a 0. No entanto, quando o núcleo W_h utilizado é uma função de simetria radial com integral unitária, a representação integral é uma aproximação de segunda ordem. De fato, usando a expansão em Série de Taylor da função f em torno do ponto $\mathbf{u}$ e substituindo na integral que define f_h , temos

$$f_h(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) \int_{\Omega} W_h(\mathbf{u} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + f'(\mathbf{u}) \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{u}) W_h(\mathbf{u} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} + O(h^2),$$

onde $O(h^2)$ é um resíduo de segunda ordem. Se o núcleo é uma função de simetria radial com integral unitária, então a primeira integral do lado direito da igualdade vale um e a segunda vale zero e portanto

$$f_h(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + O(h^2). \quad (7)$$

Muito embora a representação integral seja uma aproximação de segunda ordem, essa ordem não necessariamente é assumida pelo método SPH devido ao segundo passo de sua formulação: a aproximação por partículas. A versão discreta das condições requeridas sobre o núcleo que gera a precisão de segunda ordem é dada por

$$\sum_{j \in V_i} W_h(\mathbf{x}_{ij}) \Delta A_j = 1, \quad \sum_{j \in V_i} \mathbf{x}_{ij} W_h(\mathbf{x}_{ij}) \Delta A_j = 0. \quad (8)$$

No entanto, quando a partícula está próxima a fronteira, de modo que o suporte compacto do núcleo intersecta a fronteira do domínio, ou mesmo quando as partículas estão mal distribuídas, estas condições discretas não são satisfeitas. Esse problema é conhecido como *inconsistência de partículas* (BELYTS-CHKO, 1996). A Figura 2 ilustra o problema da inconsistência de partículas para os casos apresentados.



Figura 2: Inconsistência de partículas. À esquerda, o suporte compacto do núcleo intersecta a fronteira do domínio e à direita as partículas estão mal distribuídas no domínio.

Trabalhos tem sido desenvolvidos no sentido de minimizar os problemas gerado pela inconsistência de partículas, resultando em correções para o método. Estas correções, em geral, baseiam-se na série de Taylor e levam em consideração que as equações em (8) nem sempre são satisfeitas. Destacamos aqui as correções *Corrective Smoothed Particle Method* - CSPM (CHEN; BERAUN; CARNEY, 1999), *Modified Smoothed Particle Hydrodynamics* - MSPH (ZHANG; BATRA, 2004) e *New Corrective Smoothed Particle Hydrodynamics* - NCSPH (STRANEX; WHEATON, 2011). Uma discussão sobre tais correções, bem como um estudo comparativo entre elas pode ser encontrado em (MENDES, 2017).

Operadores Diferenciais SPH

Neste trabalho utilizaremos os operadores diferenciais discretos gradiente, divergente e laplaciano, cujas expressões para a aproximação por partículas estão listadas na Tabela 1.

Tabela 1: Operadores diferenciais discretos SPH.

Operadores	Expressão
Gradiente Diferença SPH	$(\nabla f)_h(\mathbf{x}_i) = \sum_{j \in V_i} [f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i)] \nabla_i W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \Delta V_j$
Divergente Diferença SPH	$(\nabla \cdot F)_h(\mathbf{x}_i) = \sum_{j \in V_i} [F(\mathbf{x}_j) - F(\mathbf{x}_i)] \cdot \nabla_i W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \Delta V_j$
Laplaciano Taylor SPH	$(\Delta f)_h(\mathbf{x}_i) = 2 \sum_{j \in V_i} [f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_j)] \frac{1}{h \ \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\ } W'_1(R) \Delta V_j$

Uma maneira sistemática de se obter tais operadores pode ser encontrada em (PETRONETTO, 2008) que faz um estudo detalhado sobre o comportamento desses operadores.

Resultados

Convergência. Apresentaremos agora uma análise da convergência dos operadores SPH apresentados na seção anterior. Tendo em vista que ambos os operadores gradiente e divergente são de primeira ordem, analisaremos apenas o operador divergente diferença SPH e o operador de segunda ordem laplaciano Taylor SPH. Para tal, tomaremos a norma do máximo aplicado ao erro absoluto pontual. Avaliaremos a norma do máximo para um domínio discretizado com 1000, 2000, 4000, 8000 e 16000 partículas. A fim de evitarmos o problema de inconsistência de partículas, usaremos um domínio regular, de modo que possamos utilizar o elemento de área geométrico, bem como simularemos um domínio sem fronteira.

Para o operador de primeira ordem, começaremos com o domínio inicial $\bar{\Omega} = [-2, 2] \times [-2, 2]$ e avaliaremos o operador no domínio $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Dessa forma, as partículas de Ω próximas à fronteira terão vizinhos suficientes para evitar a inconsistência de partículas.

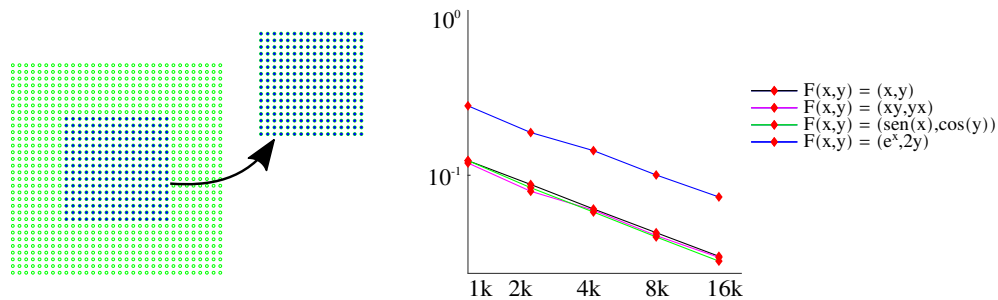


Figura 3: À esquerda o domínio $\bar{\Omega} = [-2, 2] \times [-2, 2]$, onde aplicamos o operador, e $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ onde avaliamos o operador. À direita, o gráfico em escala logarítmica da norma do máximo para aproximações do divergente de alguns campos.

Já para o operador de segunda ordem, utilizaremos funções periódicas e um espelhamento do domínio. Para este modelo, temos um domínio sem fronteira de fato, ao contrário do caso anterior, que apesar do domínio menor não sofrer influência de sua própria fronteira, este sofre influência da fronteira do domínio maior. A Figura 4 ilustra o domínio com espelhamento de partículas e a análise do operador laplaciano Taylor SPH aplicado à função $f(x, y) = \sin \pi x$.

Os resultados ilustrados até aqui foram obtidos a partir de cenários com distribuição regular de partículas e ‘sem fronteiras’, evitando a inconsistência de partículas (Figura 2). No entanto, se tratando

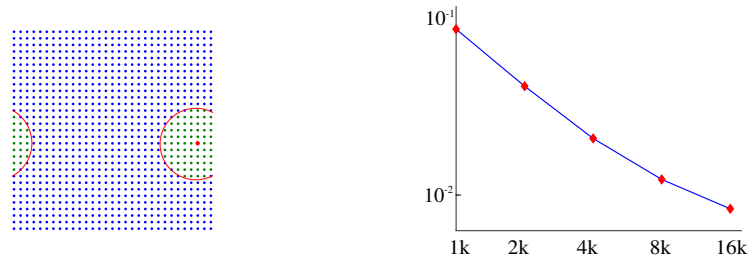


Figura 4: A esquerda a vizinhança de uma partícula próxima a fronteira num domínio com espelhamento de partícula. À direita a análise do operador laplaciano Taylor SPH aplicado à uma função periódica.

de aplicações mais gerais, nem sempre será possível obter condições tão favoráveis, ou seja, em geral o domínio não terá uma distribuição regular das partículas e apresentará fronteira. A Figura 5 ilustra o operador divergente diferença SPH aplicado ao campo $F(x, y) = (xy, xy)$ no domínio $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ discretizado com 2000 partículas segundo o disco de Poisson (COOK, 1986). Observe que embora as condições não sejam as mesmas da análise, tem-se uma boa aproximação.

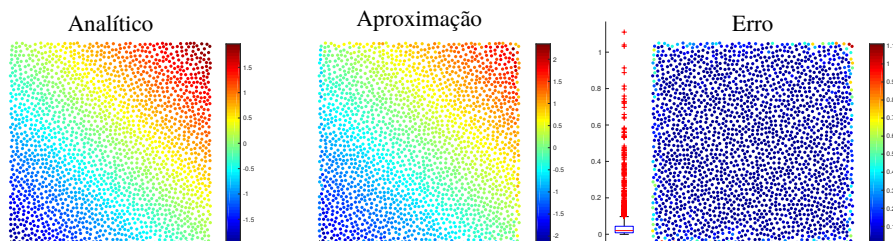


Figura 5: Operador divergente diferença SPH num domínio uniforme com fronteira e o erro por partícula.

Aplicação. A Figura 6 ilustra uma aplicação do método SPH na decomposição de campos vetoriais. Destacamos esta aplicação pois esta utiliza-se de todos os operadores discutidos neste trabalho. A Decomposição de Helmholtz-Hodge (DHH) decompõem um campo vetorial em três componentes: irrotacional, solenoidal e harmônica, simplificando sua análise, uma vez que propriedades importantes podem ser estudadas diretamente nas componentes. Petronetto e outros obtiveram a DHH a partir da resolução de alguns sistemas lineares (PETRONETTO, 2010). Mais recentemente, Cordeiro utiliza uma abordagem via funções de Green para evitar o custo na solução de sistemas lineares (CORDEIRO, 2018).

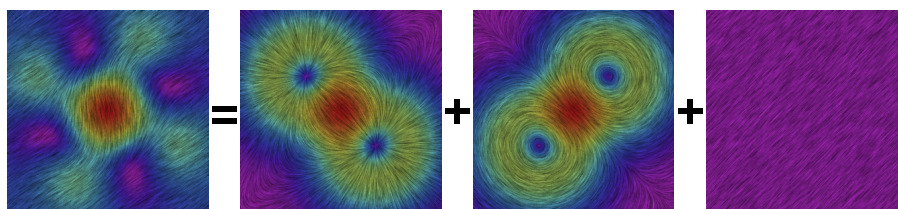


Figura 6: Decomposição de um campo vetorial. Fonte: (CORDEIRO, 2018)

Conclusões

De forma concisa, precisão, consistência e convergência do método SPH foram abordadas neste trabalho. Mostramos que a muito embora a representação integral seja uma aproximação de segunda

ordem, esta precisão não necessariamente é assumida pelo método devido a aproximação por partículas. As condições da distribuição das partículas no domínio influenciam diretamente na precisão do método.

Tendo em vista que em muitas aplicações o domínio do problema é formado por partículas que estão distribuídas de maneira irregular e são domínios limitados, ou seja, há presença de fronteira, um bom comportamento do método nessas condições é fundamental para garantir sua aplicabilidade. Porém, estas condições do domínio, geram inconsistência de partículas, que, sem dúvidas, é a maior limitação do método SPH. No entanto, uma análise feita para os operadores sobre domínios com discretização segundo o disco de poison (PETRONETTO, 2008) mostram que sob estas condições, ou seja, com domínios que geram a inconsistência de partículas, é possível obter bons resultados. Mais ainda, é possível melhorar a precisão do método utilizando correções aos operadores discretos (MENDES, 2018).

Referências

BELYTSCHKO, T. et al. Meshless methods: an overview and recent developments. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 139, n. 1, p. 3-47, 1996.

CHEN, J.; BERAUN, J.; CARNEY, T. A corrective smoothed particle method for boundary value problems in heat conduction. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 46, n. 2, p. 231-252, 1999.

COOK, R. L. Stochastic sampling in computer graphics. **ACM Transactions on Graphics (TOG)**, ACM, v. 5, n. 1, p. 51-72, 1986.

CORDEIRO, J. **Decomposição de Helmholtz-Hodge via funções de Green**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – UFES, Vitória, 2018.

EVANS, L. C. **Partial differential equations**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2002. (Graduate studies in mathematics).

FULK, D. A.; QUINN, D. W. An analysis of 1-d smoothed particle hydrodynamics kernels. **Journal of Computational Physics**, Academic Press, v. 126, n. 128, p. 165-180, 1996.

GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. **Monthly notices of the royal astronomical society**, Oxford University Press, v. 181, n. 3, p. 375-389, 1977.

LIU, G. R.; LIU, M. B. **Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method**, World Scientific, 2003.

LUCY, L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. **The astronomical journal**, v. 82, p. 1013-1024, 1977.

MENDES, E. **Operadores SPH sobre Variedades**. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – UFES, Vitória, 2017.

PETRONETTO, F. **A Equação de Poisson e a Decomposição de Helmholtz-Hodge com Operadores SPH**. 2008. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – PUC, Rio de Janeiro, 2008.

PETRONETTO, F. et al. Meshless helmholtz-hodge decomposition. **IEEE transactions on visualization and computer graphics**, IEEE, v. 16, n. 2, p. 338-349, 2010.

STRANEX, T.; WHEATON, S. A new corrective scheme for sph. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 200, n. 1, p. 392-402, 2011.

ZHANG, G.; BATRA, R. Modified smoothed particle hydrodynamics method and its application to transient problems. **Computational mechanics**, Springer, v. 34, n. 2, p. 137-146, 2004.

USO DO MINECRAFT EDUCACION NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

Elisson Spoladori Scarton

*Unicsul – Universidade Cruzeiro do Sul
elissonscarton@hotmail.com*

Fernanda da Silva Damato

*Unicsul – Universidade Cruzeiro do Sul
prof.fernandadamato@gmail.com*

Juliano Schimiguel

*Unicsul – Universidade Cruzeiro do Sul
schimiguel@gmail.com*

Laura Marisa Carnielo Calejon

*Unicsul – Universidade Cruzeiro do Sul
lauracalejon@gmail.com*

Resumo: Este estudo foi realizado a partir da teoria de mediação, tem como objetivo demonstrar a importância da utilização das novas tecnologias em sala de aula, utilizando como base a análise da teoria sócio-histórico-cultural de Lev Semenovitch Vygotsky, e as implicações desta teoria no contexto escolar, bem como o desenvolvimento do sujeito em um ambiente de aprendizagem tecnológico, utilizando para tanto o uso do celular, tablet ou computador como ferramenta para aprendizagem em sala de aula, juntamente com o aplicativo Minecraft. Faremos uma reflexão acerca das possibilidades da utilização das novas tecnologias relacionando com a teoria da mediação de Vygotsky e suas contribuições para potencializar o uso das novas tecnologias mediadas pelo processo. Os resultados indicam para um possível e atual diálogo entre a Teoria Vygotskyana e a tecnologia, se colocados em prática, teremos o desenvolvimento das funções psicológicas superiores a partir da mediação, interação com os outros, com a máquina e consigo. Visando uma interação do aluno no processo de aprendizagem com os meios tecnológicos disposto no cotidiano escolar. A intervenção do professor nas práticas em sala de aula é necessária para o êxito escolar, transformando a escola em um ambiente de construção do saber.

Palavras-chave: Tecnologias; Teoria Vygotskyana; Ensino-Aprendizagem; Desenvolvimento; Educação.

Introdução

O Minecraft é classificado como sandbox ou open world, que em português significa um “mundo aberto”, sendo ele capaz de movimentar-se livremente e transformar aquele ambiente segundo sua vontade, onde os jogadores fazem construções de cubos texturizados em um mundo com as suas próprias leis. O jogo é dividido entre três modos de jogo play: modo criativo, modo de sobrevivência, e modo aventura. O jogo disponibiliza ferramentas para criar e modificar o mundo em que o usuário percorre virtualmente, fazendo com que o usuário transforme a forma com que ele mesmo joga. A liberdade dada ao usuário na construção de seu próprio espaço faz com que o jogo rompa com a linearidade encontrada em outros games.

O jogo virtual de construção com blocos, o game, foi criado em 2011, fez tanto sucesso em sala de aula que a empresa passou a vender uma versão especial para escolas, o MinecraftEDU e ferramentas específicas para educação.

Segundo o blog Silabe, hoje quase mil escolas em mais de 40 países utilizam Minecraft, seja como parte do currículo ou em projetos pontuais. Na Suécia, o jogo já faz parte da grade de disciplinas. As possibilidades são incontáveis: “Simuladores de construção são os mais indicados por não terem missões específicas nem enredo definido, o que estimula a criatividade”, explica Cláudio Mendes, professor da Universidade Federal de Ouro Preto que estuda o uso de games na educação. Assim, cabe aos jogadores (e seus professores) decidir o que e como construir.

Para fazer bom uso da ferramenta, o desafio é buscar intencionalidade antes de inseri-la no plano de aulas. É preciso definir quais objetivos se espera que os alunos atinjam durante o percurso e como os aprendizados serão traduzidos para o mundo real.

Logo após a aquisição do Minecraft, a Microsoft comprou uma outra empresa que começava a produzir **conteúdo educativo** para o Minecraft. O produto acabou se transformando no **Minecraft: Education Edition**, a ser lançado oficialmente ainda este ano. Uma versão de testes já está disponível para baixar.

A ideia da Microsoft é utilizar a familiaridade que as crianças já têm com o jogo e os vários recursos interativos que ele oferece para oferecer experiências de ensino mais ricas.

No futuro próximo, haverá basicamente duas maneiras para os professores utilizarem o Minecraft na sala de aula: por meio da versão educacional tradicional ou aproveitando aulas ‘pré-criadas’.

Como o Minecraft é bastante flexível e permite que inúmeras atividades diferentes ocorram em seus mundos virtuais, ele se tornou a menina dos olhos de quem gosta de trazer a tecnologia para dentro da sala de aula. Ainda mais quando o mundo da educação passa a ver com maior interesse a união entre a diversão, a interatividade e o aprender – um jeito de ensinar também conhecido como gamificação.

Fundamentação Teórica

A infância é a fase de maior aprendizado na vida de uma criança, explorar é uma maneira poderosa de aprendizado. A criança se diverte ao ouvir sons, músicas, histórias, enfim a criança aprende se divertindo, esse aprendizado ocorre de forma mediada, para a criança aprender basta ter contato com o objeto de aprendizado. Na verdade boa parte da relação do indivíduo e seu entorno acontece de forma mediada, para alcançar um brinquedo em cima da mesa apoia-se em um banquinho, para tomar água precisa de um copo, ao ameaçar colocar o dedo na tomada tem a reação da mãe alertando do choque ou mesmo a lembrança do choque.

O bielorrusso Lev Vygotsky (1896 - 1934) se dedicou a estudar a relação organismo e o meio, fazendo uso da noção de mediação ou aprendizagem mediada, com isso mostrando a importância dessa mediação para o desenvolvimento dos chamados processos mentais superiores, isto é, planejar ações, conceber consequências para uma decisão, imaginar objetos, etc. Desta forma podemos distinguir o homem dos outros animais na aquisição de conhecimento.

Segundo Vygotsky, para que a criança tenha o seu desenvolvimento cognitivo o mesmo se dá por meio da interação social, ou seja, de sua interação com outros indivíduos e com o meio, e para isso acontecer é preciso no mínimo duas pessoas envolvidas ativamente trocando experiência e ideias, para que a interação entre os indivíduos possibilite a geração de novas experiências e conhecimento. A aprendizagem é uma experiência social, mediada pela utilização de instrumentos e signos, de acordo com os conceitos utilizados pelo próprio autor. Um signo, dessa forma, seria algo que significaria alguma coisa para o indivíduo, como a linguagem falada e a escrita, o momento de maior significado que dá origem às formas puramente humanas de inteligência prática e abstrata, acontece quando a fala e a atividade prática estão juntas.

Vygotsky fala que não existe melhor maneira de descrever a educação do que considerá-la como a organização dos hábitos de conduta e tendências comportamentais adquiridos. O aprendizado não altera nossa capacidade global de focalizar a atenção, ao invés disso, desenvolve várias capacidades de focalizar a atenção sobre várias coisas.

Em uma abordagem mais profunda sobre a zona de desenvolvimento proximal (ZDP), o autor fala que o aprendizado das crianças começa muito antes delas frequentarem a escola, pois, para ocorrer a aprendizagem, a interação social deve acontecer dentro da zona de desenvolvimento proximal (ZDP), que seria a distância existente entre aquilo que o sujeito já sabe, ou seja, o seu conhecimento real, e aquilo que o sujeito possui potencialidade para aprender, seu conhecimento potencial. De tal forma que a aprendizagem ocorre no intervalo da ZDP, onde o conhecimento real é aquele que o sujeito é capaz de aplicar sozinho, e o potencial é aquele que ele necessita do auxílio de outros para aplicar.

O papel do professor nessa mediação de aprendizagem consiste em utilizar estratégias que levem o aluno a tornar-se independente e estimule o conhecimento potencial, de modo a criar uma nova ZDP a todo momento, o professor pode fazer isso estimulando o trabalho com grupos e utilizando técnicas para motivar e facilitar a aprendizagem, diminuindo assim a sensação de solidão que muitas vezes o aluno sente. Uma das funções que este professor precisa estar atento é que este aluno construa seu conhecimento em grupo com participação ativa e a cooperação de todos os envolvidos no processo.

Nos dias de hoje temos muitas ferramentas tecnológicas, que a educação atual pode fazer uma conexão e que permitem uma variedade de formas de usar a tecnologia no ambiente escolar. Isso dependerá da capacidade de investimento e da criatividade dos educadores.

Metodologias e Métodos para utilizar

Os professores e os alunos entram no mundo do Minecraft, porém, os profissionais da educação recebem ferramentas que permitem moldar o jogo de acordo com seus propósitos educativos, criando conteúdo e exemplos de aulas, ao mesmo tempo em que têm o poder sobre boa parte das ações dos alunos.



Fonte <https://silabe.com.br/blog/minecraft-na-sala-de-aula-uma-boas-ideia-para-ajudar-os-professores/>

A versão educativa do game Minecraft traz tutoriais interativos que ensinam inclusive para os professores como utilizar as diversas ferramentas do jogo e aproveitar melhor seu vasto mundo de possibilidades.

O professor acessa, junto com os alunos, mundos já criados previamente para ensinar determinados conceitos. Um exemplo é um **mundo para ensinar geometria espacial** (veja abaixo). Outro exemplo que a Microsoft anunciou é de uma ‘aula’ sobre preservação ambiental, a qual utiliza as versões simplificadas de ecossistemas presentes no jogo para ensinar sobre os perigos do desmatamento.

Dessa forma, muito mais do que ouvir ou ler sobre um assunto, os alunos poderão vivenciar os temas discutidos pelos professores e, ativamente, agir ao longo do desenvolvimento das aulas.



Fonte <https://silabe.com.br/blog/minecraft-na-sala-de-aula-uma-boas-ideia-para-ajudar-os-professores/>

Em comunicado, a Microsoft anunciou há poucos dias aulas inéditas de **geometria** na versão educativa do Minecraft. Acompanhe abaixo o comunicado e perceba, nas palavras grifadas, os principais enfoques desta iniciativa:

“Criado por Marco Vigelini e Alisia Arcone, este mundo e **plano de aula** oferecem às estudantes oportunidades para explorar conceitos geométricos básicos de área e perímetro. **Faça com que** seus alunos descubram as relações entre estas medidas enquanto aprendem sobre quadriláteros e outras formas. **Quando tiver terminado**, use o espaço em aberto para construir ainda mais.

Plano de aula – foco não apenas no lado lúdico da brincadeira, mas principalmente no pedagógico e na importância do profissional da educação como mediador.

Faça com que... – o professor é essencial para fazer a criançada prestar atenção no que importa. Como o jogo é um ‘mundo aberto’, com inúmeras possibilidades interativas, é o professor que tem o controle das atividades.

Quando tiver terminado... – o professor e seus alunos poderão aproveitar os demais aspectos do jogo de maneira ‘livre’, assim que a aula estiver concluída, oferecendo novas possibilidades de aprendizado e de interação.

Em especial, criar aulas no mundo do Minecraft exigirá que os professores reservem várias horas de trabalho, inicialmente aprendendo como funciona a interface e, depois, editando-a e inventando aulas criativas.

Objetivos de aprendizagem

Minecraft é hoje um dos jogos mais populares do mundo entre as crianças. Há aproximadamente 8 anos no mercado, o game é uma febre entre os mais novos por vários motivos.

Com seus gráficos simples e de fácil jogabilidade, tem rodado o mundo conquistando mais jogadores e novas possibilidades de se utilizar o jogo.

Observada o alto potencial educativo que esse game oferece, observamos 8 pontos interessantes do Minecraft:

1. O Minecraft não tem fim
2. As crianças estarão seguras no jogo
3. Os diferentes modos de jogo
4. Minecraft é para todo mundo
5. Estimula o trabalho em equipe
6. Os Mods do Minecraft
7. O Minecraft é muito educativo
8. O Minecraft para o aprendizado da programação

Popular entre as crianças, ensina conceitos importantes para o futuro de maneira divertida e interativa.

Conclusões

Podemos concluir que este estudo pode contribuir para a disseminação da ideia de trabalhar com jogos na sala de aula, contudo promovendo situações que sejam mais prazerosas e motivadoras para os alunos e professores, trazendo para sala de aula a realidade cotidiana e dando um significado ao uso de recursos digitais para a educação. A popularidade de Minecraft trouxe diversos estudos sobre os usos educacionais na ferramenta, seja em matérias curriculares, extracurriculares e as habilidades do Século XXI. Nem todas as habilidades do Século XXI foram utilizadas em contexto escolar, porém temos alguns exemplos de sucesso, o que serve como uma base de incentivo para fazer outros testes e combinações. O fato de Minecraft estar no mercado há quase uma década, e ainda ser lançado para novas plataformas, serve como elemento de incentivo para a pesquisa, afinal, é certo que o jogo receberá suporte por um bom tempo.

Referências

PONTE, J.O **computador: Um Instrumento da Educação**. Lisboa: Texto, 1986.

CENDALES, Lola; MARÍÑO, Germán. **Aprender a pesquisar, pesquisando**. São Paulo: Edições Loyola, 2005.

LORENZONI, Marcela. Minicraft. **Projetos com Minecraft para a sua sala de aula**, São Paulo, 29 out. 2018. Disponível em: << <http://www.arededinf.br/3432-2/>>>. Acesso em: 29 out. 2018.

PORTAL G1. **A plataforma de jogos com a qual adolescentes estão ganhando milhões de dólares**. Disponível em: <<https://g1.globo.com/tecnologia/games/noticia/a-plataforma-de-jogos-com-a-qual-adolescentes-estao-ganhando-milhoes-de-dolares.ghtml>>. Acesso em: 11 set. 2018.

REGO, Tereza Cristina. **Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação**. 7 ed. Petrópolis: Vozes, 1999.

SANTOS, Jocelaine. Uso de tecnologia por crianças: benefício ou perda da infância? **Sempre Família**, São Paulo, 14 jun. 2018. Disponível em: <<<https://www.semprefamilia.com.br/uso-de-tecnologia-por-criancas-beneficio-ou-perda-da-infancia/>>>. Acesso em: 14 jun. 2018.

TAILLE, Yves de La; OLIVEIRA, Marta Kohl de; DANTAS, Heloisa. **Piaget, Vygotsky, Wallon: Teorias Psicogenéticas em discussão**. 10 ed. São Paulo: Summus Editorial, 1992.

TIC na Educação do Brasil. **Unesco 2017**, São Paulo, 11 set. 2018. Disponível em: <<http://www.unesco.org/new/pt/brasil/communication-and-information/access-to-knowledge/ict-in-education/>>. Acesso em: 11 set. 2018.

VYGOTSKY, Lev. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

Ensino e Aprendizagem de Matemática Mediante Trabalho Colaborativo na Nuvem: experiências com o Google Apresentações

Aminadabe de Farias Aguiar

Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

aminadabeaguiar@gmail.com

Lúcio Souza Fassarella

Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

luciofassarella@gmail.com

Ernane Luis Angeli Luxinger

Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Ernane.angeli@hotmail.com

Resumo: Apresentamos uma breve discussão sobre uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) no ensino e aprendizagem¹ da matemática focalizando o trabalho colaborativo na nuvem, seguida de um relato das experiências com a atividade *Slide Colaborativo*, desenvolvidas em turmas do 2º e 3º anos do Ensino Médio de duas escolas do município de Linhares – ES. São analisados qualitativamente o desenvolvimento e os resultados da atividade considerando os trabalhos produzidos, os dados coletados através da observação participante e os registros escritos das impressões de alguns alunos. Como resultados, observamos a dificuldade de compreensão e de acesso à Internet, por parte de alguns alunos, desfazendo a ilusão de que os jovens são ávidos por tecnologias e estão todos conectados sempre.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem de Matemática. Educação na Nuvem. Trabalho Colaborativo.

Introdução

O desenvolvimento do indivíduo e a aquisição do conhecimento começam nos primeiros dias de vida mediante interações com objetos e seres que estejam em sua volta. Segundo Vygotsky (2007), a aprendizagem é uma experiência social, mediada pela utilização de objetos, instrumentos e signos, sendo que “a experiência social exerce seu papel através do processo de imitação, quando a criança imita a forma pela qual o adulto usa instrumentos e manipula objetos”. Essa experiência se intensifica pela mediação da memória com auxílio dos “signos e seu papel crucial no desenvolvimento individual” (VYGOTSKY, 2007, p. 7, 31). Para esse teórico,

O uso de pedaços de madeira entalhada e nós, a escrita primitiva e auxiliares mnemônicos simples, demonstram, no seu conjunto, que mesmo nos estágios mais primitivos do desenvolvimento histórico os seres humanos foram além dos limites das funções psicológicas impostas pela natureza, evoluindo para uma organização nova, culturalmente elaborada, de seu comportamento. [...] Acreditamos que essas operações com signos são o produto das condições específicas do desenvolvimento social (VYGOTSKY, 2007, p. 32).

Concordando com Vygotsky, Mizukami (1986) defende que a educação pode ser vista como um processo de socialização, onde se criam condições de cooperação, colaboração, trocas e intercâmbio entre as pessoas. Para ela, o processo educativo deve ser baseado na pesquisa, na resolução de problemas e na reflexão sobre erros cometidos, de modo a oportunizar aos alunos uma compreensão da estrutura fundamental do conhecimento. Consequentemente, o professor deve utilizar

¹ O termo “ensino e aprendizagem” foi utilizado na visão de Borba e Penteado (2015): possibilidades para o desenvolvimento do aluno, do professor e das situações de ensino e de aprendizagem.

estratégias que levem os alunos a desenvolverem sua independência, desafiando-os e provocando desequilíbrios, orientando sem comprometer o autocontrole e a autonomia individual. Assim, o

objetivo da educação, portanto, não consistirá na transmissão de verdades, informações, demonstrações, modelos etc., e sim que o aluno aprenda por si só a conquistar essas verdades [...]. A autonomia intelectual será assegurada pelo desenvolvimento da personalidade e pela aquisição de instrumental lógico-racional. A educação deverá visar que cada aluno chegue a essa autonomia (MIZUKAMI, 1986, p. 71).

Sob tais pressupostos, entendemos que o processo de ensino e aprendizagem não pode ser pensado como uma simples transmissão de conhecimentos, nem pode ser realizado de um modo que leve os alunos a prescindirem de suas interações sociais. Pelo contrário, no âmbito da educação formal, os professores devem criar situações estruturadas para que os alunos possam construir seu conhecimento em grupo, com participação ativa e cooperação de todos os envolvidos. Para conseguir isso os professores podem recorrer às modernas tecnologias disponíveis, utilizando-as em atividades escolares como defendem diversos autores, dentre os quais Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014). Segundo eles, é importante explorar recursos inovadores e suas potencialidades com o propósito de minimizar o abismo existente entre as práticas escolares e os acontecimentos sociais extraescolares.

Referencial Teórico

Borba e Penteado (2015) mostram que experiências exitosas vêm sendo realizadas em diversos lugares com o uso criativo das tecnologias, sempre respeitando o protagonismo do estudante e sua vocação para a descoberta. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para o Ensino Fundamental (1997) e para o Ensino Médio (2000) também orientam a inserção das tecnologias no currículo estudantil, indicando que o trabalho com o auxílio das tecnologias pode favorecer o aluno a construir seu próprio conhecimento, a aprender com seus colegas e, também, com seus próprios erros.

Como os recursos tecnológicos são essenciais para o mercado de trabalho e este não pode ser dissociado da educação, esses recursos devem ser inseridos na escola em atividades essenciais, tais como ler, escrever, contar, interpretar gráficos, desenvolver noções espaciais, etc. Desse modo, o acesso à informática pode ser visto como parte de um projeto coletivo de democratização de acessos às tecnologias de informação e comunicação (BORBA; PENTEADO, 2015).

Desde o advento da Internet, o saber não está mais restrito à sala de aula ou às bibliotecas. Hoje, é possível aprender em qualquer lugar onde exista um aparelho conectado à rede mundial de computadores, desde que haja disposição para estudo. Tal possibilidade pode ser explorada pela escola, a chamada *educação flexível (blended education)*: misto de educação presencial e à distância, devido a mobilidade do acesso à informação por diversas mídias atuais (COSTA, 2009).

Amparada por tais considerações, inspirada nos trabalhos de Mansur *et al.* (2011) e instigada pelos resultados insatisfatórios das avaliações regulares na disciplina de Matemática, obtidos em duas escolas do Ensino Médio da cidade de Linhares - ES, a professora e coautora deste artigo desenvolveu e aplicou a atividade didática chamada *Slide Colaborativo*, que possui as características de ser aberta e colaborativa, bem como baseada numa tecnologia em nuvem, acessível e disponível gratuitamente na Internet: a ferramenta *Google Apresentações*. Esta atividade visou atender a Portaria 065-R de 31 de maio de 2017 da Secretaria Estadual de Educação do Espírito Santo (SEDU), que em seu Art. 1º

estabelece normas e procedimentos para a oferta das modalidades de recuperação e de ajustamento pedagógico, parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, necessários para garantir o direito à aprendizagem de todos os estudantes das unidades de ensino da Secretaria Estadual de Educação (SEDU, 2017, p. 01).

Dentre outras disposições, a Portaria institui a Recuperação Paralela, um processo de ensino e aprendizagem que deve ocorrer paralelamente às atividades desenvolvidas durante o período letivo,

visando oportunizar o estudante a melhorar seu desempenho em disciplinas com baixo aproveitamento. O Art.4º determina que a

Recuperação Paralela deve ser assegurada a todos os estudantes de forma imediata, tão logo diagnosticadas as dificuldades de aprendizagem, como um mecanismo que busca desenvolver e/ou resgatar as competências e as habilidades necessárias à integração do educando com os conteúdos do currículo (SEDU, 2017, p. 01).

Logo, o professor deve diagnosticar estudantes com baixo desempenho e desenvolver (como Recuperação Paralela) atividades significativas, diversificadas e específicas, propiciando-lhes a superação das dificuldades constatadas, recorrendo a metodologias, estratégias e procedimentos diferenciados de ensino, adequados às dificuldades desses estudantes (SEDU, 2017).

Educação na Nuvem e o Google Apresentações

O termo Computação em Nuvem, difundido recentemente, surgiu em 1961 num formato rudimentar a partir das ideias de John McCarthy, professor e especialista em Inteligência Artificial do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), que apresentou um modelo aos moldes do serviço de distribuição de energia elétrica. Esse termo representa uma rede de computadores que distribui o poder de processamento, as aplicações e sistemas entre suas várias máquinas, fornecendo aos usuários uma combinação de diversas infraestruturas e serviços computacionais. As aplicações baseadas no conceito de nuvem não são processadas em um único computador (como nos modelos de processamento de dados tradicionais), mas são divididas em partes a serem processadas e armazenadas nos vários computadores que compõem a nuvem, sem que haja uma localização ou propriedade únicas.

Segundo Mansur *et al.* (2011) a Educação em Nuvem, baseada no conceito de Computação em Nuvem, mostra-se como novo paradigma, pois os saberes não estão mais fixos em ambientes físicos ou virtuais, e sim disseminados através das redes de computação, como uma nuvem de saberes. Esse modelo de educação possui as seguintes características:

baixo custo de recursos financeiros e computacionais, [...], acessibilidade aos dados educacionais por pessoas desprovidas de recursos financeiros para adquirir um computador pessoal (desktop ou laptop), uma vez que qualquer dispositivo [...], com acesso à internet, pode conectar à nuvem (MANSUR *et al.*, 2011, p. 81).

O Google Apresentações é uma ferramenta gratuita em nuvem disponível na Internet, que pode ser acessada por computadores ou dispositivos móveis munidos do aplicativo *Apresentações Google*. O acesso pelo computador requer uma conta no *Google* e utiliza a ferramenta *Google Driver*. Com o Google Apresentações, o usuário pode criar e editar apresentações diretamente em seu navegador, inserindo textos, imagens, vídeos e efeitos de transição. Com essa ferramenta um grupo de pessoas pode produzir colaborativamente uma apresentação, mesmo trabalhando em lugares e momentos diferentes. O processo começa com uma pessoa que cria uma apresentação e a compartilha com seus contatos de *e-mail*, atribuindo aos colaboradores uma das opções: *editar*, *comentar* ou *visualizar*. Os colaboradores podem conversar assincronicamente pelo recurso de *inserir comentários* (“*Add comments*”), o que permite distribuírem tarefas e discutirem elementos da apresentação enquanto a constroem. Também é possível verificar as etapas da construção da apresentação pelo recurso de *visualizar o histórico*, que informa data, horário e autor de cada alteração realizada.

Existem vídeos tutoriais disponíveis no Youtube sobre o uso do Google Apresentações, dentre os quais citamos dois em Língua Portuguesa: <<https://www.youtube.com/watch?v=QFar20uG8Hc>> e <<https://www.google.com/intl/pt-BR/slides/about/>> (acessados em 02/11/2018).

Atividade didática Slide Colaborativo

A atividade didática *Slide Colaborativo* se enquadra no conceito de *educação flexível* e foi desenvolvida com base na ferramenta *Google Apresentações*. Para sua realização, o professor começa explicando a tarefa em sala de aula, estabelecendo seu objetivo, como ela deve ser realizada pelos alunos e determinando um prazo para a realização da tarefa. A turma pode ser dividida em grupos,

caso em que um aluno de cada grupo ficará responsável por iniciar a apresentação e compartilhar com os demais componentes os links de acesso para edição. Para instruir sobre a utilização do *Google Apresentações*, o professor pode optar por indicar vídeos tutoriais disponíveis no *Youtube* (eventualmente, algum criado por ele próprio).

O professor deve acompanhar o processo de construção dos slides, identificando equívocos e intervindo, quando necessário, para garantir seu bom desenvolvimento – dando sugestões, se preciso. Ao finalizar a tarefa, as apresentações podem ser discutidas em sala de aula ou até publicadas na Internet², ação que pode motivar a participação e o empenho dos alunos na sua execução.

Naturalmente, o professor também pode usar a atividade para avaliar os alunos qualitativamente (atribuindo ou não alguma pontuação), levando em consideração as contribuições de cada um, bem como critérios objetivos para qualificar a apresentação produzida, *e.g.*: *correção técnica, correção linguística, consistência, coerência, aspectos estéticos*, etc. Conforme Bicudo (2012, p. 116, 117) “o *qualitativo* engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões” em que podem ser privilegiados “descrições de experiências, relatos de compreensões, [...], relatos de observações e outros procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais, de conhecimentos, etc”.

Ao longo do processo de construção dos slides os alunos de cada grupo devem buscar alcançar os objetivos, construindo uma apresentação coerente, isenta de erros, sem redundâncias e esteticamente satisfatória, ao organizarem o trabalho. Devem, ainda, analisar e discutir as contribuições dos colegas, para que desse modo, naturalmente, a atividade estimule os alunos a dialogar sobre o assunto com o professor e com os colegas, viabilizando um aprendizado permeado das contribuições dos vários indivíduos e das fontes que cada um usou.

Descrição das experiências

A atividade descrita acima foi proposta no primeiro trimestre de 2018 como atividade de Recuperação Paralela para os alunos que obtiveram aproveitamento inferior a 60% na Prova de Matemática, oriundos das turmas de 2º e 3º ano da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio (EEEFM) Profª Antonieta Banhos Fernandes e da Escola Estadual de Ensino Médio (EEEM) Emir de Macedo Gomes, objetivando o trabalho em equipe e a revisão dos conteúdos estudados anteriormente.

A Tabela 1 identifica as turmas envolvidas e, para cada uma, o número total de alunos com nota abaixo da média que deveriam realizar a atividade, bem como o número de alunos que participaram da atividade³ em cada turma:

Tabela 1: Turmas e participações na atividade *Slide Colaborativo*.

EEEFM Profª Antonieta Banhos Fernandes			EEEM Emir de Macedo Gomes		
Turma	Nº total de alunos	Nº de participantes na atividade	Turma	Nº total de alunos	Nº de participantes na atividade
2ºM1	25	13	2ºV6	23	18
2ºM2	24	23	2ºV7	31	14
2ºM3	30	25	3ºV5	25	22
3ºN1	13	13	3ºN1	28	24
			3ºN2	25	13

2 Em publicação online, deve-se tomar cuidado para não anexar, sem permissão, conteúdos resguardados por direitos autorais.

3 No período em que a atividade foi desenvolvida a primeira escola possuía em média 35 alunos por turma e a segunda escola em média 43 alunos.

A atividade consistiu em elaborar com o *Google Apresentações* uma apresentação de todo conteúdo estudado ao longo do primeiro trimestre letivo sobre Estatística e Exponencial (2º ano) ou Estatística e Probabilidade (3º ano), incluindo conceitos e problemas resolvidos. O objetivo estabelecido para todas as turmas foi realizar a atividade de forma colaborativa, respeitando as contribuições dos colegas e cuidando para manter a coerência da apresentação. Foi estipulado que cada estudante revisaria os conteúdos estudados e acrescentaria sua contribuição em 4 slides.

Para as turmas da EEEFM Profª Antonieta Banhos Fernandes, foram atribuídos 2 pontos à atividade, os quais seriam somados à nota de outra atividade de recuperação; o prazo estabelecido para realização da atividade foi de uma semana (de segunda a segunda). Para as turmas da EEEM Emir de Macedo Gomes foi aplicada apenas a atividade *Slide Colaborativo* para recuperação e atribuídos 4 pontos; foi estabelecendo inicialmente o prazo de 4 dias (de quinta a segunda) para sua realização, mas o mesmo foi estendido para 7 dias a pedido dos alunos, que alegaram problemas no acesso à Internet.

Após cumpridos os prazos, as apresentações foram discutidas em sala de aula com todas as turmas, à exceção de uma na qual o diálogo entre a professora e os alunos foi impossibilitado pela confusão que emergiu na turma. Nas discussões, os alunos tiveram a oportunidade de relatar suas impressões, dificuldades e aprendizados na construção das apresentações; foram analisados junto com a professora o que ficou bom e o que ficou aquém do razoável. A Escola EEEFM Profª Antonieta Banhos Fernandes, com o consentimento dos alunos, publicou os trabalhos na sua página na Internet: <<http://antonietabanhosfernandes.blogspot.com>> (acessado em 02/11/2018).

Embora o desenvolvimento e o aproveitamento da atividade tenham variado entre as turmas, diversos aspectos foram comuns, inclusive algumas surpresas. Coletamos dados pela *observação participante* e submetemos um questionário aberto a uma das turmas, “de modo a fornecer uma *descrição incontestável* que sirva para futuras análises e para o relatório final” (ANDRÉ, 2013, p. 100). No questionário, pedimos que os alunos descrevessem suas impressões acerca da atividade, considerando o momento da orientação inicial, da realização e após o término.

A *observação participante* nos provocou algumas impressões que foram corroboradas pelas respostas ao questionário. Apresentamos essas impressões abaixo, seguidas de algumas respostas transcritas (*ipsis litteris*).

A atividade gerou empolgação em alguns alunos (inclusive entre aqueles alunos que geralmente apresentam grande dificuldade com a matemática) e insegurança ou temor em outros:

Discente MEN: *Para uma atividade de recuperação foi completamente diferente diante dos outros professores, foi bom, uma forma diferente de recuperar a nota, e forma de aprendizagem, de tarefa cumprida.*

Discente JBM: *No primeiro momento achei a ideia inovadora, pois foi a primeira vez que eu realizo uma atividade avaliativa por uma plataforma online.*

Houve apreço pela atividade por ter sido realizada sem a tensão típica de uma prova:

Discente EB: *Como eu tenho dificuldade eu achei melhor fazer por slides, pois se fosse prova novamente talvez eu não conseguiria.*

Discente JBM: *A possibilidade de elaborar uma atividade sem o estresse e a pressão que a maior parte dos alunos sentem - situação da qual me incluo, torna a elaboração da atividade muito prazerosa.*

As principais causas da insegurança (verificadas na maioria dos alunos) foram a demora para compreender a dinâmica do processo e a dificuldade em usar o *Google Apresentações*:

Discente EB: *Ao realizar senti um pouco de dificuldade para mecher com o programa, mas superei.*

Discente BF: *Ao primeiro momento que a professora pediu a atividade eu simplesmente achei que não iria dar certo pois era uma atividade coletiva e normalmente essa atividade [costuma] não dar muito certo. Quando eu tava fazendo a atividade, eu sentir que não iria dar certo, pois eu tenho uma certa dificuldade em matemática, mais aí eu fui fazendo e foi dando certo.*

Os relatos mostram que os alunos interagiram e se preocuparam em verificar as contribuições dos colegas, pelo menos para checar se estava tudo em ordem:

Discente EB: *[...] todos os dias olhava para ver se tinha algo errado.*

Discente RLA: *Senti dificuldade no que colocar nos slides para não repetir o que meus colegas colocaram.*

Nas manifestações sobre a impressão após o término da atividade, diversos alunos registraram a sensação de “dever cumprido”:

Discente EAM: *Satisfação, pois ficou bem legal o resultado. Gostei de trabalhar em equipe.*

Discente RLA: *Sensação de dever cumprido, pois fiz com muito carinho, dedicação e atenção, tenho certeza que isso refletiu no resultado. Sentimento que resume tudo isso. Felicidade!*

Considerações finais

A Educação em Nuvem apresenta características advindas da Computação em Nuvem que podem contribuir para o ensino na Educação Básica. A atividade *Slide Colaborativo* utiliza esses recursos na forma de um processo interativo que envolve os alunos dentro e fora da sala de aula, sendo caracterizada por ser colaborativa, assíncrona e flexível; além disso, coloca explicitamente os alunos como responsáveis pela construção do próprio conhecimento, enquanto o professor figura como mediador no processo de aprendizagem.

Em nossa experiência, percebemos o engajamento de vários alunos com evidente preocupação de que o trabalho desse certo, posto que tomaram iniciativas e se empenharam em ajudar os colegas. Também pudemos verificar que a atividade surtiu efeito positivo no rendimento de vários alunos nos exercícios de fixação e revisão que realizaram subsequentemente. Cabe registrar que alguns alunos participaram da atividade voluntariamente, sem que precisassem da recuperação.

As dificuldades demonstradas na compreensão da proposta e na utilização do *Google Apresentações* contrariaram nossas expectativas e o senso comum de que os jovens são ávidos por tecnologia. Também percebemos que a atividade não empolgou todos os alunos, sendo que alguns a fizeram desleixadamente, provavelmente apenas devido à pontuação atribuída. Sobre isso, nos lembramos do que afirmou Skovsmose (2014, p. 46):

Podemos convidar, mas nunca obrigar, os alunos a participarem das atividades em torno de um cenário para investigação. Se o convite vai ser aceito ou não é sempre incerto. Eles podem se encantar com a proposta ou podem não manifestar nenhuma curiosidade a respeito.

As dificuldades de acesso à Internet, relatadas por alguns alunos, também prejudicou o desenvolvimento da atividade, mostrando que a ideia de que os jovens estão sempre conectados também não corresponde precisamente à realidade.

Como resultado geral, a atividade atingiu apenas parcialmente o propósito inicial de revisar conceitos estudados, além de constituir uma forma alternativa de avaliação. Entretanto, consideramos a experiência válida e temos a pretensão de aplicá-la novamente na expectativa de que a prática tornará sua realização mais fácil e proveitosa, pois os alunos estarão familiarizados com o Google Apresentações e com o que nós, professores, esperamos do trabalho deles.

Referências

- ANDRE, M. **O que é um estudo de caso qualitativo em educação**. Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade, Salvador, v. 22, n. 40, p. 95-103, jul./dez. 2013.
- BORBA, M. de C.; SCUCUGLIA, R. da S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 1. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.
- BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5 Ed.; 1 reimpressão. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: < <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em out. 2018.
- BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em out. 2018.
- BICUDO, M. A. V. **Pesquisa Qualitativa e pesquisa Qualitativa segundo a abordagem fenomenológica**. In: BORBA, M. de C.; ARAUJO, J. de L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. 4ª Ed. Revisada. Belo Horizonte. Autentica, 2012, p. 111-124.
- COSTA, A. **Cloud Education, a Educação da era da Convergência**. Artigo (2009). Disponível em <<http://acertodecontas.blog.br/artigos/cloud-education-a-educacao-da-era-da-convergencia/>>. Acesso em 06 Jun. 2018.
- MANSUR, A. F. U. et al. **Novos rumos para a Informática na Educação pelo uso da Computação em Nuvem (Cloud Education): Um estudo de Caso do Google Apps**. Campos dos Goytacazes. RJ, 2010. Relato de Experiência. Disponível em <<http://www.abed.org.br/congresso2010/cd/252010112729.pdf>>. Acesso em 06 Jun. 2018.
- MANSUR, A. F. U. et al. **Cloud Education: Aprendizagem Colaborativa em Nuvem através do Kindle e de Redes Sociais**. Cadernos de Informática - Volume 6. Número 1, 2011. Disponível em <<http://www.seer.ufrgs.br/cadernosdeinformatica/article/viewFile/v6n1p79-86/11728>>. Acesso em 06 Jun. 2018.
- MIZUKAMI, M. da G. N. **Ensino: As Abordagens do Processo**. Capítulo 4 – Abordagem Cognitiva. São Paulo: EPU, 1986.
- SEDU. Secretaria de Estado da Educação. **Portaria nº 065-R, de 31 de maio de 2017**. Disponível em <<http://sedu.es.gov.br/Media/sedu/pdf%20e%20Arquivos/Portaria%20065-R-1.pdf>>. Acessado em Abril de 2018.
- SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica**. Tradução de Orlando de Andrade Figueiredo. Campinas, SP: Papirus, 2014.
- VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente – O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 7ª. Edição. São Paulo: Martins Fontes, 2007. 4ª tiragem, 2010.

A contemporaneidade na educação: O uso do celular como ferramenta pedagógica na prática docente de professores de Matemática de Escolas Estaduais do Espírito Santo

Érica Rezende Perini; Joccitiel Dias da Silva
Faculdade Vale do Cricaré
ericaperini@gmail.com; joccitiel@gmail.com

Resumo: O estado do Espírito Santo liberou o uso do celular nas escolas estaduais, por meio da Lei nº 10.506/2016 e da Portaria nº 107-R/2016, que estabelece critérios de uso pedagógico do equipamento. Tal decisão surgiu devido ao contexto do mundo contemporâneo, onde o dispositivo se faz presente na construção da identidade dos jovens, assim como mostrado na pesquisa TIC Educação e também pontuado pela Unesco, que defende que as tecnologias móveis são ferramentas capazes de auxiliar os processos educativos, ampliar o tempo de estudo e personalizar a aprendizagem. Assim, mediante recorte de dissertação, percebemos que professores de Matemática da rede estadual de ensino do Espírito Santo estão dentre os que mais relataram competência no uso do celular enquanto ferramenta didático-pedagógica. Os dados foram coletados de um formulário eletrônico disponibilizado pela Secretaria de Estado da Educação (Sedu) aos docentes. Mapeamos, então, estes profissionais, considerando seu nível de ensino de atuação e, após, analisamos os perfis, considerando sua formação em TIC e sua experiência tecnológica desenvolvida na escola. Constatamos que boas práticas já acontecem na rede, mas ainda são pontuais, sugerindo a necessidade de apropriação de novas abordagens metodológicas por parte dos professores de Matemática.

Palavras-chave: Tecnologias Móveis na Educação. Aprendizagem Personalizada. Ensino de Matemática.

Introdução

O mundo contemporâneo está repleto de inovações tecnológicas que levaram a sociedade a repensar seu cotidiano, e as escolas assim como todas as demais entidades e organizações, fazem parte desse contexto de mudanças, uma vez que estão repletas de estudantes diariamente conectados, que desconhecem a realidade de viverem distantes das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), especialmente do telefone celular. Em consequência, se faz urgente que as escolas garantam uma educação de qualidade e o pleno desenvolvimento dos alunos, formando sujeitos capazes de criar, de resolver problemas e de receber informações de forma conectada, colaborativa e crítica, desafiando-os a experimentarem novos meios de aprender, por meio de aulas diferenciadas que despertem o interesse dos alunos, trazendo o celular como aliado do processo de ensino-aprendizagem.

Por conseguinte, no ano de 2013, a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco) lançou o documento ‘Diretrizes e Políticas da Unesco para a Aprendizagem Móvel’, pontuando que as tecnologias móveis podem ampliar e enriquecer oportunidades educativas para estudantes em ambientes diversos, pois permitem a personalização da aprendizagem por meio dos vários aplicativos disponíveis com fins educacionais. Além disso, devido a sua onipresença, o celular tornou-se a TIC interativa mais amplamente utilizada no planeta (UNESCO, DIRETRIZES, 2014, p. 7 e 9). Dessa maneira o documento visa auxiliar formuladores de políticas a compreenderem sobre a aprendizagem móvel e como aproveitar seus benefícios para promover a educação para todos.

O celular favorece a comunicação instantânea e o acesso a conteúdos diversos. Ademais, possibilita oportunidades de aprendizagem capazes de desafiar instituições educativas, uma vez que permite que os alunos continuem aprendendo, à sua maneira e no seu tempo.

Acresce-se ao afirmado pela Unesco, o fato de que o uso do dispositivo na sala de aula pode reduzir o real problema da carência/sucateamento de computadores e/ou de laboratórios de informática nas instituições públicas de ensino, pois “em escolas com menos recursos, podemos desenvolver projetos significativos e relevantes para os alunos, ligados à comunidade, utilizando tecnologias simples como o celular, por exemplo, e buscando o apoio de espaços mais conectados na cidade” (MORAN, 2015, p. 23). Deste modo, estratégias e metodologias bem delineadas permitem fomentar a

produção colaborativa do conhecimento. Para tanto, Allan (2015) pontua que os professores precisam superar o desafio de adequar suas práticas pedagógicas à realidade e às necessidades dos jovens conectados presentes na escola e “encontrar a melhor maneira de incorporar os smartphones e tablets dos próprios alunos na sala de aula é algo fundamental se quisermos envolver as novas gerações, atraí-las para a aventura do conhecimento” (ALLAN, 2015, p. 85). Adolescentes e jovens estão habituados a lidar com tecnologias, mas não se trata do uso incontido do celular por parte deles e sim do uso consciente, com regras/limites estabelecidas, em vista disso, professores, juntamente com seus alunos, são responsáveis pela geração de uma sociedade democrática do conhecimento e a escola é o principal local para que isso aconteça.

Em concordância com esse cenário, a 7ª edição da Pesquisa TIC Educação¹, realizada em 2016 com alunos e professores de escolas urbanas públicas (municipais e estaduais) e privadas, mostrou que para 81% dos estudantes de escolas públicas estaduais o celular é o principal equipamento de acesso a Internet e que 50% deles não possuem computador de mesa em seus domicílios. Destaca-se, também, que 64% dos alunos da rede estadual usam o dispositivo para realizar atividades escolares, inclusive, o uso de redes sociais com fins educacionais já existe, sendo o *WhatsApp* a mais utilizada (65%), seguida pelo *Facebook* (39%). Os dados sugerem a relação firmada entre os adolescentes, o uso da tecnologia, o celular e a Internet.

A plataforma aprendizagem social GoConqr² publicou em seu *blog* um guia contendo “40 Funções do Celular em Sala de Aula”, uma vez que seus responsáveis acreditam que as tendências educacionais atuais caminham no sentido inverso ao de poucos anos atrás, quando se buscava banir o dispositivo das escolas. Cabe ao professor à mediação da aprendizagem atrelada à transmissão dos conteúdos, pois “o mestre deve fazer as perguntas certas, instigar a curiosidade nos alunos, e convidá-los para, juntos, construir o conhecimento” (ALLAN, 2015, p. 146). O uso de jogos educacionais (gamificação), por exemplo, usa mecanismos de engajamento como níveis, competições, medalhas e premiações para resolver problemas práticos ligados às disciplinas, o que desperta a autoconfiança do aluno. Existem várias plataformas adaptativas que disponibilizam atividades gamificadas cujo acesso pode ser feito pelo celular. Allan (2015, p. 94) explica que “os games educativos trazem para os professores uma série de recursos que permitem personalizar o ensino de acordo com as necessidades de cada aluno, reforçando o conceito de aprendizado adaptativo” (ALLAN, 2015, p. 94).

Cabe destacar que o uso das tecnologias está contemplado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)³, documento que dispõe sobre as aprendizagens essenciais que devem ser garantidas pelas redes de ensino, ao longo da Educação Básica, de forma a assegurar aos alunos o desenvolvimento de dez competências gerais, que sintetizam os direitos de aprendizagem e de desenvolvimento (BRASIL, 2017, pág. 8). Importante considerar, também, que as competências da BNCC estão vinculadas ao proposto nas metas do Plano Nacional de Educação (PNE)⁴, que deverão ser cumpridas por meio de estratégias que incluem a utilização das tecnologias no processo de ensino-aprendizagem.

Diante de todo o panorama exposto, visando atender as demandas contemporâneas, a Secretaria de Estado da Educação (Sedu), por meio da Assessoria Especial de Tecnologia Educacional (Programa Sedu Digital), revisitou o Regimento Escolar da Rede Estadual de Ensino do Estado do Espírito e encaminhou para que o Conselho Estadual de Educação (CEE) aprovasse algumas adaptações relacionadas ao uso do celular nas escolas da rede estadual. Assim, de forma precursora no país, a Sedu tornou sem efeito a lei estadual que proibia o uso do dispositivo nas instituições estaduais de

¹ A Pesquisa TIC Educação possui abrangência nacional e é realizada em escolas urbanas públicas (municipais e estaduais) e privadas pelo Comitê Gestor da Internet no Brasil (Cgi.br), por meio do Centro Regional de Estudos para o Desenvolvimento da Sociedade da Informação (Cetic.br). Para saber mais, acesse <<http://cetic.br/pesquisa/educacao/>>.

² Plataforma que une os benefícios de ferramentas poderosas com a força de uma comunidade ativa e criativa, permitindo criar, descobrir e compartilhar recursos de aprendizagem. Saiba mais em <<https://www.goconqr.com/pt-BR/>>. Bolg GoConqr <<https://www.goconqr.com/pt-BR/examtime/blog/celular-em-sala-de-aula/>>. Acesso em: 21/04/2018.

³ Para outras informações sobre a BNCC, acesse <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>.

⁴ Lei ordinária prevista no artigo 214 da Constituição Federal, com vigência de dez anos contados a partir de 26/06/2014.

ensino e publicou a lei nº 10.506/2016, liberando seu uso com fins pedagógicos. Desse modo, almeja-se aproveitar todo o potencial dessa tecnologia, já de domínio dos alunos, para motivá-los e engajá-los em processos educacionais mais dinâmicos e criativos e, para garantir esse fim, a Sedu instituiu a Portaria nº 107-R/2016, que estabelece critérios de uso do equipamento como ferramenta didático-pedagógica nas escolas da rede pública estadual.

Tal necessidade surgiu da importância de tornar a aprendizagem mais significativa, buscando por novas metodologias de ensino que impactem positivamente na melhoria dos indicadores de aprendizagem da rede estadual de educação do Espírito Santo, tendo em conta que dados da Prova Brasil de 2015⁵, mostram que estamos muito aquém de um resultado satisfatório de aprendizagem, pois apenas 15% dos alunos matriculados no 9º ano do ensino fundamental do Espírito Santo aprenderam o adequado⁶ em Matemática. No que tange ao ensino médio da rede estadual, no ano de 2017, o Espírito Santo apresentou o melhor crescimento do país para o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), atingindo o valor de 4,1, porém, ainda permanecemos abaixo da meta estipulada (4,4), indicando que os resultados permanecem alarmantes.

Método

O presente trabalho é um recorte da dissertação “Os dispositivos móveis e a contemporaneidade na educação: o uso dos celulares nas escolas da rede estadual de ensino do Espírito Santo”, no qual estudamos o uso do celular como instrumento de apoio ao processo de ensino-aprendizagem nas escolas estaduais do Espírito Santo. Assim, por meio de um questionário *online* (“Você é um profissional TIC? – Edição 2017”) disponibilizado no ano de 2017 pelo Programa Sedu Digital aos profissionais da rede estadual de ensino, mapeamos o quantitativo de professores de Matemática, respondentes ao formulário, que relatou competência no uso do dispositivo como ferramenta didático-pedagógica, considerando seu nível de ensino de atuação, além disso, analisamos o perfil destes docentes, considerando suas formações em TIC e a experiência tecnológica desenvolvida na escola.

A Sedu possui 480 (quatrocentos e oitenta)⁷ escolas estaduais distribuídas entre os municípios do estado. Seleccionamos as respostas dos professores que relataram ter competência tecnológica para uso do celular como ferramenta didático-pedagógica em sua prática docente. Desse modo, a pesquisa teve abrangência em escolas localizadas em municípios aleatórios e chegamos ao seguinte cenário: consideramos inicialmente os 3.064 (três mil e sessenta e quatro) respondentes da rede estadual de ensino que atuam diretamente na docência (excluímos Técnicos Educacionais, Diretores, Coordenadores e outros). Destes, 2.285 (dois mil, duzentos e oitenta e cinco) educadores relataram ter alguma experiência no uso pedagógico do celular na sala de aula (74,6% deles). Após, delimitamos a amostra, considerando tão-somente os professores de Matemática.

Resultados

Dentre os professores que relataram competência de uso pedagógico do celular na sala de aula (2.285 deles), a maior parte leciona no ensino médio (803 ou 35% deles) ou nos anos finais do ensino fundamental (787 ou 34% deles). O significativo número de profissionais atuantes nessas etapas da educação básica pode ser devido a esses serem os dois maiores campos de atuação da rede estadual de ensino, além de contemplarem os estudantes com mais maturidade. Os demais respondentes atuam na Educação de Jovens e Adultos, na Educação Especial/Sala de Recursos e na Educação Profissional.

⁵ Dados extraídos do Portal público QEdU, que contém informações sobre a qualidade do aprendizado em cada escola, município e estado do Brasil. Saiba mais em <<http://www.qedu.org.br>>.

⁶ No resultado da Prova Brasil, os alunos são distribuídos em 4 (quatro) níveis na escala de proficiência: Insuficiente, Básico, Proficiente e Avançado. Considera-se como aprendizado adequado aqueles que estão nos níveis proficiente e avançado.

⁷ Dados do Censo Escolar de 2016 disponibilizados no portal QEdU.

Buscando perceber os profissionais que se mostraram mais abertos às mudanças metodológicas, separamos a amostra por componente curricular ministrado nas etapas supracitadas, uma vez que elas já possuem professores distintos por disciplina, e notamos expressiva quantidade de docentes de Matemática que relataram possuir competência para uso do celular como ferramenta didático-pedagógica em suas aulas (268 no total), como mostra o Gráfico 1.

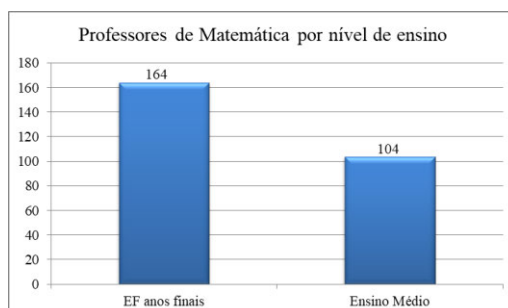


Gráfico 1 – Quantitativo de professores de matemática, que utilizam o celular em sua prática docente, por nível de ensino (Sedu/ES, 2017)

No ensino fundamental (anos finais), a disciplina de Matemática foi a que alcançou o maior número de docentes com experiência de uso pedagógico do celular (164 professores dos 787 respondentes considerados, equivalendo a cerca de 21%). Já no ensino médio, os professores de Matemática ocuparam a terceira colocação (104 docentes dos 803 respondentes considerados, equivalendo a cerca de 13%). Tais dados merecem especial destaque, pois para os professores que ministram os demais componentes curriculares, em ambos os níveis de ensino, a competência de uso do dispositivo em suas aulas foi relatada de maneira menos expressiva e bastante distribuída entre eles.

Buscamos, então, conhecer a participação desses profissionais em cursos ofertados pelo Sedu Digital⁸. As formações não são obrigatórias e professor pode realizá-las durante as horas de planejamento ou no seu tempo disponível. Além disso, todas se enquadram nas dimensões da ‘autonomia’, da ‘autoria’, da ‘colaboração’ ou da ‘inovação metodológica’. Para essa questão, os professores poderiam selecionar mais de uma opção. O Gráfico 2 sintetiza as respostas dos docentes.



Gráfico 2 – Quantitativo de professores de Matemática, que utilizam o celular em sua prática docente, que participaram nas formações ofertadas pelo Programa Sedu Digital (Sedu/ES, 2017)

Nota-se que foi baixo o número de professores de Matemática que realizou formações, contudo houve público em todos os cursos ofertados. As formações com maior número de cursistas foram: ‘TIC nas escolas: Nível Básico e Nível Médio’ (49 e 31 cursistas, respectivamente), cujos conteúdos buscam inserir a cultura das TIC na escola, e ‘Modelagem Matemática e Programação Linear com

⁸ Formações gratuitas, certificadas e *online* ofertadas anualmente, em sua maioria, por meio de parceria estabelecida, no ano de 2016, com a Fundação Telefônica – Vivo (Programa Escolas Conectadas). Consideramos aqui, apenas cursos específicos à Matemática ou que contemplam, de forma geral, as dimensões ‘autonomia’, ‘autoria’, ‘colaboração’ e ‘inovação metodológica’.

Geogebra' (23 cursistas), específico para Matemática. Os dados sugerem que estes docentes estão buscando meios de inserir a tecnologia digital como parte relevante do processo educativo. Com o intento de complementar o que se almeja acerca das competências tecnológicas dos docentes de Matemática, o Gráfico 3 mostra às experiências desenvolvidas por eles em suas escolas de atuação.



Gráfico 3 – Experiência tecnológica dos professores de Matemática, com relato de uso do celular em sua prática docente, desenvolvida nas escolas (Sedu/ES, 2017)

A apreciação do Gráfico 3 revela que as três competências cujos docentes de Matemática possuem mais experiência são: uso de jogos digitais (195 docentes); colaboração em redes sociais com alunos (184 docentes); produção de videoaulas, vídeos, podcast etc. (164 docentes). A experiência com jogos digitais foi a mais expressiva, o que sugere a percepção dos docentes de Matemática quanto ao impacto positivo de atividades gamificadas na aprendizagem de seus estudantes, quando bem orientadas. Além disso, a 7ª edição da pesquisa TIC Educação mostrou que os alunos fazem uso de redes sociais para realizarem atividades educacionais e essa foi a segunda experiência tecnológica mais desenvolvida pelos professores, o que pode indicar a compreensão deles sobre novas formas de transmitir conhecimentos. Outro ponto relevante é o grande número de docentes que relatou ter experiência na produção de aplicativos para dispositivos móveis, o que é um grande avanço. Ao confrontar esses dados com o Gráfico 2, notamos uma sinergia com os cursos ofertados, o que confirma a importância da formação na prática docente capaz atender as demandas do século XXI.

Em paralelo ao cenário encontrado e com o intento de fortalecer o uso do celular como ferramenta didático-pedagógica, por meio de metodologias ativas de aprendizagem, a Sedu viabiliza, via Programa Sedu Digital, ambientes e conteúdos digitais para fomentar o uso da tecnologia enquanto recurso pedagógico, tais como: Portais de Conteúdos⁹, que disponibilizam objetos digitais de aprendizagem em formatos variados e de domínio público, cujo acesso pode ser feito pelo celular; Plataformas Adaptativas e Personalizadas¹⁰, que são ambientes virtuais onde é possível personalizar a aprendizagem a partir da sugestão de atividades para que cada aluno aprenda no seu ritmo, também permitem acesso via celular; Sala de Aula Virtual¹¹, que são espaços virtuais de apoio a professores e estudantes da rede estadual de ensino, que oferecem ferramentas digitais de interação para desenvolver atividades colaborativas, compartilhar ideias, criar ambientes para reforço escolar e interação virtual e outros, pode ser utilizado pelo celular com acesso à Internet; GeoGebra¹², que é um programa equipado com ferramentas multimídia de matemática (ferramenta de autoria) e que permite a criação de atividades alternativas para estimular o desenvolvimento cognitivo, a linguagem e a autonomia.

De forma complementar, os professores são incentivados a buscarem por formações e capacitações com foco no desenvolvimento de competências que abrangem as dimensões autonomia,

⁹ Cita-se como exemplo: Currículo Interativo Digit@l <<https://www.curriculointerativo.sedu.es.gov.br/>>; Hora do Enem <<http://tvescola.mec.gov.br/tve/serie/hora-do-enem>>.

¹⁰ Cita-se como exemplo o Portal da Matemática <<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/site/index?a=1>> ; Khan Academy <<https://pt.khanacademy.org/>>.

¹¹ Salas de Aula Virtual: Office 365, da Microsoft, e Google Classroom, da Google.

¹² Saiba mais em <<http://ogeogebra.com.br/site/>>.

autoria, colaboração e inovação metodológica, para que possam investir em metodologias inovadoras que transformem a escola em um espaço de aprendizagem apropriado aos jovens contemporâneos.

Conclusões

O uso do celular no espaço escolar precisa colaborar com o propósito de integrar pessoas, dinamizar ideias e propor soluções para situações problema. Desse modo, considerando não só a legislação estadual que normatiza a utilização do equipamento nas escolas, bem como todo seu potencial pedagógico desde que os objetivos pedagógicos sejam bem definidos, é importante fomentar novas metodologias de ensino, apoiadas no celular, refletindo sobre a necessidade, cada vez mais urgente, das pessoas aprenderem a buscar pelos caminhos do conhecimento.

Buscamos conhecer o nível de ensino e o componente curricular ministrado pelos educadores da rede que agregaram o celular em sua prática pedagógica e percebemos que os professores de Matemática estão entre os que mais aderiram à inovação metodológica, atuando, sobretudo no ensino médio e no ensino fundamental (anos finais). Podemos crer que tais profissionais compreenderam não somente a potencialidade educacional do equipamento, capaz de auxiliar no processo de ensino-aprendizagem de seus alunos, mas também que o papel do professor está passando por mudanças significativas, no qual ele também incorpora a função de mediador da aprendizagem. Acresce-se a isso o fato de que práticas docentes apoiadas na legislação estadual já acontecem em muitas escolas, contudo, é preciso que elas deixem de ser pontuais, para que a cultura de uso do celular no processo de ensino-aprendizagem se fortaleça. Pretende-se, assim, incentivar docentes a desenvolverem metodologias ancoradas na personalização, na colaboração e na orientação, proporcionando ao aluno a capacidade de atuar de forma ativa, protagonista e responsável sobre sua aprendizagem.

Ao findar a análise, notamos que o entendimento do caráter pedagógico do celular entre os docentes de Matemática da rede estadual ainda é discreto, mas muitos profissionais já buscam meios de inovar sua prática ao desenvolverem a competência para o uso da referida tecnologia como ferramenta didática, uma vez que o equipamento, mesmo sem conexão com a Internet, dispõe de recursos como cronômetro, calculadora, câmera fotográfica ou filmadora para produção de portfólios e vídeos etc. E, se conectado, permite pesquisas, uso de plataformas gamificadas e outras possibilidades. Cabe aos professores, então, se apropriarem das diversas metodologias de aprendizagem oferecidas, para que a correta curadoria e seleção do que se pretende trabalhar seja feita, considerando as necessidades específicas dos alunos e a infraestrutura tecnológica da escola.

Referências

ALLAN, L. **Escola.com: como as novas tecnologias estão transformando a educação na prática**. Barueri, SP: Figurati, 2015.

BLOG GoConqr. **40 Funções do Celular em Sala de Aula**. 2015. Disponível em: <<https://www.goconqr.com/pt-BR/examtime/blog/celular-em-sala-de-aula/>>. Acesso em: 19 de abril de 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>>. Acesso em: 03 de janeiro de 2018.

COMITÊ GESTOR DA INTERNET NO BRASIL. **Pesquisa sobre a infraestrutura, os usos e a apropriação das TIC nas escolas brasileiras**: TIC Educação 2016. Disponível em <<http://cetic.br/pesquisa/educacao/>>. Acesso em: 01 de novembro 2017.

ESPÍRITO SANTO. **Lei nº 10.506**. Revogação da Lei nº 8.854, de 22 de abril de 2008, que dispõe sobre a proibição do uso de telefone celular nas salas de aula dos estabelecimentos da rede estadual de ensino. 2016.

_____. **Portaria nº 107-R**. Estabelece critérios para a utilização do telefone celular como ferramenta didático-pedagógica nas salas de aula das instituições de ensino da rede pública estadual. 2016.

MORAN, J. M. **Educação Híbrida: Um conceito-chave para a educação, hoje**. In: BACICH, L.; NETO, A. T.; TREVISANI, F. DE M. (Org.). Ensino Híbrido: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre, RS: Penso, 2015, p.27-45.

_____. **Mudando a educação com metodologias ativas**. In: SOUZA, C. A.; MORALES, O. E. T. (Org.). Convergências midiáticas, educação e cidadania: aproximações jovens. Ponta Grossa: UEPG, 2015. v. 2, p. 15-33. Disponível em <<http://www.youblisher.com/p/1121724-Colecao-Midias-ContemporaneasConvergencias-Midiaticas-Educacao-e-Cidadania-aproximacoes-jovens-VolumeII/>>. Acesso em: 02 de outubro 2017.

PERINI, E. R. **Os dispositivos móveis e a contemporaneidade na educação: o uso dos celulares nas escolas da rede estadual de ensino do Espírito Santo**. 2018. 136f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ciência, Tecnologia e Educação) – Faculdade Vale do Cricaré, São Mateus, 2018.

NETO, J. C.; BLANCO, M. B.; SILVA, J. A. **O uso de gamificação e dificuldades matemáticas: possíveis aproximações**. Revista CINTED-UFRGS; Novas Tecnologias na Educação, v. 15 nº 1, p. 1-9, jul. 2017.

PORTAL **Ideb**, Resultados. Disponível em: <<http://ideb.inep.gov.br/resultado/>>. Acesso em: 15 de agosto de 2017.

_____. **QEdu**. Disponível em: <<http://www.qedu.org.br/>>. Acesso em: 15 de agosto de 2017.

_____. **Sedu Digital**. Disponível em: <<http://sedudigital.sedu.es.gov.br/>>. Acesso em: 22 de outubro de 2017.

_____. **Sedu. Espírito Santo tem maior crescimento dos últimos 10 anos no Ensino Médio**. Disponível em: <<https://sedu.es.gov.br/Not%C3%ADcia/espírito-santo-tem-maior-crescimento-dos-ultimos-10-anos-no-ensino-medio>>. Acesso em: 10 de outubro de 2018.

_____. **Observatório do Plano Nacional de Educação**. Disponível em: <<http://www.observatoriodopne.org.br/>>. Acesso em: 22 de dezembro de 2017.

UNESCO. **Diretrizes de políticas da Unesco para a aprendizagem móvel**. Tradução para o português pela Representação da Unesco no Brasil em 2014. Disponível em <<http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002277/227770por.pdf>>. Acesso em: 10 de agosto de 2017.

ANÁLISE DA DEFASAGEM EM MATEMÁTICA APRESENTADA POR ALUNOS DO CURSO TÉCNICO EM EDIFICAÇÕES (ETIM) NA DISCIPLINA ESMCC

Viviane Fernandes Santos
Unicsul
contato_viviane@hotmail.com

Laura Marisa Carnielo Calejon
Unicsul
lauracalejon@gmail.com

Resumo: O trabalho apresentado resulta de uma pesquisa, em desenvolvimento, sobre a defasagem de aprendizagem observada em alunos do Ensino Médio Integrado, de uma unidade da Etec na zona leste da cidade de São Paulo. A pesquisa nasce dos desafios enfrentados pela professora que leciona na disciplina Estudo de Solos e Materiais de Construção Civil desde 2013. Na condição de docente a professora enfrenta o desafio de organizar recuperação de conteúdos da matemática básica que deveriam ter sido aprendidos no Ensino Fundamental e se constituem em pré-requisitos para a escolarização atual. Objetiva-se descrever a organização da pesquisa em andamento, o contexto de ensino que originou a investigação.

Palavras-chave: Defasagem de Aprendizagem. Matemática Básica. Ensino Fundamental. Ensino de Matemática.

Introdução

A Matemática ainda hoje é considerada difícil, frustrante, causa de aversão e questionamento sobre o porquê estudá-la. É na Educação Básica que os alunos têm seus primeiros contatos com conhecimentos elementares de Matemática. Sendo assim, se a aprendizagem matemática nessa fase for deficiente; o aluno tem um conhecimento pouco adequado de conteúdos da matemática que são necessários no processo posterior de escolarização, carregando o atraso ao longo de sua trajetória escolar. Além do conhecimento insuficiente, os conteúdos da matemática tornam-se aversivos.

Como professora de ensino médio integral do curso de Edificações oferecido pelo Centro Paula Souza na Etec Itaquera II, venho sendo desafiada a encontrar a solução para esta situação. A aversão produzida pelos conteúdos matemáticos, o desempenho dos alunos egressos do ensino fundamental em avaliações educacionais nesta área demonstra os desafios que a educação precisa compreender.

No Curso Técnico de Edificações a matemática é essencial para novos conhecimentos, principalmente nas disciplinas técnicas. Sendo assim, a medida que o conteúdo da disciplina técnica é abordado, são requisitados conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental que serão a base para formação de novos conhecimentos apresentados.

A presente investigação tem como foco a defasagem de aprendizagem em Matemática nos ingressantes do Curso Técnico Profissionalizante de Edificações. Isto porque, os conteúdos técnicos se fundamentam em componentes curriculares que exigem conteúdos matemáticos prévios ensinados no Ensino Fundamental. Nesse sentido, a referida defasagem traz implicações não só para o prosseguimento do Ensino Médio Regular, como também para o desenvolvimento das competências necessárias aos componentes do eixo técnico profissionalizante.

O Contexto de Ensino que gerou a pesquisa

O interesse pelo assunto no tema abordado nesta pesquisa – Análise da Defasagem em Matemática apresentada por alunos do curso técnico em edificações (ETIM) na disciplina ESMCC – resulta de observações e inquietações decorrentes da atuação profissional e da pesquisadora, como professora no Curso de Edificações – Integrado ao Ensino Médio, na ETEC ITAQUERA II – CENTRO PAULA SOUZA; atuando desde 2013.

Durante os últimos 5 anos, lecionando a disciplina de ESMCC (Estudo dos Solos e Materiais de construção Civil), percebi que dificuldades matemáticas são apresentadas durante a apresentação de resultado de aulas práticas e durante a realização de exercícios nas aulas, decorrente de dúvidas relacionadas a conhecimento precário de conceitos matemáticos ensinados nos anos anteriores da escolarização.

Sendo assim, como professora licenciada em Matemática, não sentia dificuldades em realizar interferências constantes em minhas aulas; realizando pequenas revisões de conteúdos matemáticos à medida que eram solicitados junto com exercícios de aplicação que tinham real significado na construção civil.

Depois de avaliadas as dúvidas, os próprios discentes chegavam a conclusão, que suas dúvidas não eram dúvidas relacionadas as disciplinas técnicas, e sim, às dificuldades relacionadas a conceitos matemáticos prévios não adquiridos anteriormente.

Tenho observado, em especial na disciplina de ESMCC (Estudo dos solos e Materiais de Construção Civil); que o que faltou para muitos alunos foram condições e conhecimentos prévios da matemática, para o avanço da aprendizagem das bases tecnológicas em que a matemática foi requisitada. Tais conhecimentos prévios deveriam ter sido construídos ao longo de sua trajetória escolar e acabaram defasados.

As pequenas revisões de conteúdos anteriores que se faziam necessárias resolveram por um lado o problema imediato, mas criavam outra dificuldade, atrasando o conteúdo da disciplina.

A Defasagem de Aprendizagem e o Desempenho dos alunos em Matemática

Considerada a grande vilã entre as disciplinas e campeã de reprovação, a matemática vem sendo rotulada ao longo dos anos. Cabe ao professor que ensina a matemática em sala de aula, propor inúmeras estratégias para reverter o fracasso escolar. Conforme Da Costa et al. (2017), apesar das novas metodologias que possam auxiliar a profissão do professor, fatores como uma rotina desgastante na sala de aula, as condições de trabalho e própria formação; faz com que a maioria dos professores trabalhem desmotivados. Fazendo com que seu trabalho, às vezes não propicie novas possibilidades de aprendizado a alunos que apresentam grandes dificuldades em matemática.

Assim, muitos alunos terminam o Ensino Fundamental e chegam ao Ensino Médio com uma grande defasagem no conhecimento da matemática Básica que serve como ferramenta para prosseguimento dos estudos durante o Ensino Médio (DA COSTA et al., 2017, p.639).

A palavra defasagem empregada pelos autores mencionados, aparece citada sem maiores definições. Mas devido a uma série de definições conceituais, precisamos analisar a diferença entre os termos defasagem de aprendizagem e defasagem idade-série; ambas resultantes em atraso escolar.

A *Defasagem* ou *Distorção idade-série* é definida como o tipo de defasagem apresentada por alunos que estão cursando a série com idade superior a recomenda. O cálculo é realizado utilizando a idade atual do aluno, subtraindo a idade recomendada ou prevista para série em que está cursando. O aluno é considerado em *distorção* quando o resultado é de dois anos ou mais (SARAIVA, 2010).

Desta forma, o aluno com *defasagem* ou *distorção idade-série* carrega o atraso consigo para próxima fase de estudos. Isso porque, seja qual for o motivo da defasagem: reprovação ou abandono de

estudos, o resultado será repetir uma mesma série. E ao prosseguir os estudos, o aluno é considerado defasado em relação à sua idade, ou seja, sua idade está acima da recomendada ou da considerada adequada, conforme a legislação educacional do Brasil.

A *Defasagem de Aprendizagem* corresponde as dificuldades apresentados pelo discente na série que está cursando e que normalmente são avaliadas através de padrões de desempenho em avaliações externas (ALEIXO, 2014).

Sendo assim, a defasagem estudada nesta pesquisa, relaciona-se com a defasagem citada no estudo acima de Da costa et al. (2017); ou seja, defasagem de aprendizagem. A apropriação adequada dos conceitos científicos no campo da matemática relaciona-se com o desenvolvimento do pensamento lógico, abstrato e generalizador, ampliando a capacidade do sujeito de compreender o mundo em que vive. Desta forma, se o aluno não contempla os conhecimentos matemáticos básicos, e dificilmente avançará na aprendizagem de novos conteúdos curriculares. A Defasagem no processo evolutivo preocupa não só os professores de matemática em diferentes segmentos da escolarização, mas outros professores e educadores desde o ensino fundamental até a graduação.

Gasparini, Kestring e Weber (2015) afirmam que alunos ingressos de cursos superiores apresentam grande defasagem nos conteúdos relacionados a matemática básica. Com o objetivo de amenizar o problema, as instituições de ensino superior oferecem cursos de matemática básica, visando auxiliar os estudantes que tiveram dificuldades matemáticas que não foram sanadas durante sua trajetória escolar; ou que tiveram um ensino básico considerado deficitário. Sendo assim, os autores afirmam, que o problema de defasagem é um desafio mundial que precisa de solução para ajudar os estudantes que pretendem cursar uma graduação de engenharia, por exemplo, mas apresentam dificuldades em Matemática.

As principais dificuldades de aprendizagem em Matemática detectadas por Massola e Allevato (2016), em alunos ingressantes na educação superior são habilidades e conhecimentos específicos relacionados a Educação Básica, como por exemplo, ações relacionadas a resolução de problemas: investigar, analisar se a resposta ao problema é válida, argumentar e justificar. Tal deficiência, resulta em alunos que participam do ambiente escolar de forma mecânica, sem refletir nos conceitos, não possuindo autonomia para construção de seu conhecimento. Estas dificuldades não podem ser atribuídas somente aos alunos, mas também a qualidade do ensino.

Nos cursos superiores de exatas, uma das maiores dificuldades dos alunos ingressantes é assistir as aulas da disciplina de Cálculo I, pois é preciso relembrar a matemática estudada na Educação Básica, além do raciocínio lógico e a interpretação. É importante ressaltar, que o aluno com dificuldade em matemática básica, deve procurar por algum tipo de revisão ofertada pela instituição de ensino. Isto porque no ensino superior, ao longo do curso os conteúdos considerados pré-requisitos são cobrados, no entanto não repassado pelo professor na disciplina regular do ensino superior. Sendo assim, “ter um conhecimento bom de matemática básica proporciona um melhor aproveitamento das disciplinas exatas e, consequentemente, facilita a aprovação nas mesmas” (GASPARINI; KESTRING; WEBER, 2015, p.1176).

Os cursos dos Institutos Federais são conhecidos por sua excelência no Ensino regular (Ensino Médio), aliada a uma sólida formação técnica profissionalizante. No entanto, é necessário que os discentes tenham um total domínio dos conteúdos do Ensino Fundamental que servirão de base para a construção de novos conhecimentos. Quando os novos alunos possuem defasagem e deficiência de aprendizado de determinados conteúdos, sentem dificuldade compreender os conteúdos apresentados nas disciplinas técnicas e até mesmo nas disciplinas voltadas ao ensino regular (OLIVEIRA, DE ANDRADE PAIVA E MELO, 2017).

Diferente do sistema que vem sendo adotado nos Institutos Técnicos Federais, como o curso de matemática básica ou o nivelamento matemático anterior ao período de aula ou paralelo ao mesmo; nas Escolas Técnicas Estaduais do Centro Paula Souza, o professor deve criar um processo de recuperação contínuo e paralelo, como consta no Regimento Comum das Escolas Técnicas Estaduais

do Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza sobre processo de Avaliação do Ensino e da Aprendizagem.

O grande desafio que o professor enfrenta, dada a heterogeneidade existente nas salas de aula é atender tanto os alunos que apresentam defasagem e necessitam de procedimentos que permitam a superação destas para acompanhar os colegas, como atender aqueles que apresentam desenvolvimento real e atual adequado para aprendizagem dos conceitos tratados nas disciplinas.

Os discentes em defasagem apresentam tensão e frustração e devem ser tratados com diversas intervenções, pois tem dificuldade em acompanhar o ritmo da turma. Em contrapartida, alunos em estágio avançado de aprendizado, devem ser estimulados, para que não tenham frustração no seu desenvolvimento lógico matemático.

Para compreender a questão da apropriação do conhecimento e dos conceitos científicos, tomamos em consideração as explicações sistêmicas pelo Enfoque Histórico – Cultural para as relações entre aprendizagem e desenvolvimento humano na produção das funções psíquicas superiores.

A pesquisa em andamento

Visto que a pesquisa em andamento tem como problema norteador o estudo sobre os conceitos da Matemática, ensinados no Ensino Fundamental que se constituem em pré-requisito para compreender o conteúdo da disciplina de Estudo dos Solos e Materiais de Construção Civil do Curso de Edificações. E analisar o grau de domínio destes conceitos por alunos ingressantes na disciplina mencionada.

Foi estabelecido como objetivos da pesquisa analisar o programa da disciplina identificando os conceitos prévios de Matemática e o desempenho de alunos ingressantes no Curso de Edificações (ETIM), na disciplina Estudo dos Solos e Materiais de Construção Civil.

Para alcançar os objetivos de pesquisa, será utilizada a abordagem metodológica de pesquisa qualitativa do tipo estudo de caso, cujo coleta de dados será realizada na turma de 2019, do Ensino Médio Integrado. Tal estudo permitirá um aprofundamento em relação a defasagem matemática encontrada por alunos ingressantes, na disciplina de Estudo dos solos e Materiais de Construção Civil, bem como a coleta de dados, a estratégia de análise de dados, são necessárias para formular a pesquisa.

Para o estudo, será realizada a análise documental do programa da disciplina, para identificar os conceitos básicos que se constituem pré-requisitos para o conteúdo da disciplina. Posterior ao estudo do currículo da disciplina, com base nos dados levantados, será preparada uma avaliação inicial diagnóstica, cuja objetivo é analisar o desempenho dos alunos ingressantes em relação aos conceitos prévios da matemática.

Conclusões

A defasagem em matemática não é um problema isolado, antes constitui-se em um desafio mundial que precisa de solução, para ajudar os estudantes que desejam estudar, mas apresentam dificuldades em Matemática. Desta forma, se o aluno não contempla os conhecimentos matemáticos básicos, dificilmente avançará na aprendizagem de novos conteúdos curriculares. A Defasagem no processo evolutivo preocupa não só os professores de matemática em diferentes segmentos da escolarização, mas outros professores e educadores desde o ensino fundamental até a graduação.

Com o estudo pretende-se demonstrar que o que falta para muitos alunos, são os conhecimentos de matemática, necessários para o avanço da aprendizagem das bases tecnológicas em que a matemática

foi requisitada. Tais conhecimentos prévios deveriam ter sido construídos ao longo de sua trajetória escolar e acabaram defasados.

Referências

ALEIXO, Roberta Eliane Gadelha. Defasagem de aprendizagem em matemática: o caso de uma escola estadual de educação profissional do estado do Ceará. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação/CAEd. Programa de Pós-Graduação em Gestão e Avaliação da Educação Pública, 2014. 110 p.

DA COSTA, Jaqueline Gomides et al. Um olhar sobre as potencialidades de um curso de matemática básica para a diminuição das dificuldades na disciplina de matemática. In: **Anais Encontro Goiano de Educação Matemática**, v. 6, n. 6, p. 638-647, 2017

MASOLA, Wilson de Jesus; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Dificuldades de aprendizagem matemática dos alunos ingressantes na educação superior uma inclusão recorrente. **Brasil Para Todos-Revista Internacional**, v. 2, n. 2, p. 120-131, 2016.

ESTADUAIS, Regimento Comum das Escolas Técnicas; SOUZA, PAULA. Deliberação CEETEPS Nº 003, de 18-7-2013.

GASPARIN, Priscila Pigatto; KESTRING, Franciele Buss Frescki; WEBER, Pedro Elton. Diagnóstico da proficiência de matemática em alunos ingressantes de engenharias e licenciaturas da Ufpr-Medianeira. In: SEMINÁRIO NACIONAL INTERDISCIPLINAR EM EXPERIÊNCIAS EDUCATIVAS, 5., Francisco Beltrão, 2015.

SARAIVA, A.M.A. Distorção idade-série. In: OLIVEIRA, D.A.; DUARTE, A.M.C.;

VIEIRA, L.M.F. **Dicionário: trabalho, profissão e condição docente**. Belo Horizonte: UFMG/Faculdade de Educação, 2010. CDROM.

OLIVEIRA, Vinícius Augusto; PAIVA, Eleide Leile; MELO, Luciane Magda. Ensino de Matemática: uma análise das dificuldades apresentadas pelos alunos ingressantes no ensino médio integrado do IFTM. In: **Anais do Seminário de Pesquisa e Inovação Tecnológica-SEPIT**, v. 1, n. 1, 2017.

VIANA, Gisele Aparecida Xavier; DE FREITAS, Vinicius José Teixeira; DE RESENDE, Renan Antônio. Uma proposta de ensino- aprendizagem de matemática aplicada nos cursos técnicos subsequentes do Instituto Federal De Minas Gerais, Campus Congonhas.

YIN, Robert K. Estudo de caso: planejamento e métodos/Robert K. **Yin. Trad. Daniel**, 2001.

YIN, Robert K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Penso Editora, 2016.

O método do *Gradient Sampling* com Passo Limitado aplicado ao Problema de Determinação das Condições de Equilíbrio Operacionais de Sistemas Dinâmicos

Lucas Almeida Portela

Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais (EE-UFMG)

lukz.portela@gmail.com

Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi

Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais (ICEX-UFMG)

taka@mat.ufmg.br

Resumo: Propõe-se, nesse trabalho, restringir (limitar) o passo da direção de busca do método do *Gradient Sampling*, que significa adicionar uma restrição em caixa (*Box Constraints*) a cada problema quadrático desse método. Chama-se de *Gradient Sampling* com Passo Limitado o algoritmo proposto com essa alteração. Ao final, testa-se o método proposto ao problema de se determinar as condições de equilíbrio operacionais de sistemas dinâmicos de baixa complexidade, até 40 variáveis de estado. Escolheu-se, como exemplo de sistemas dinâmicos, o sistema termo-pneumático para tal tarefa.

Palavras-chave: Otimização Não Linear. Otimização Não Convexa. *Gradient Sampling*. *Gradient Sampling* com Passo Limitado. Ponto de Equilíbrio Operacional de Sistemas Dinâmicos.

Introdução

Com o avanço dos métodos numéricos, *hardwares* computacionais e da modelagem matemática de sistemas dinâmicos, tem-se tornado possível a construção de sistemas complexos (no sentido de serem formados por um número substancial de subsistemas, envolvendo centenas ou milhares de variáveis) em ambiente completamente virtual.

Entretanto, uma vez que os vários subsistemas são representados por um conjunto expressivo de equações algébrico-diferenciais, contendo um conjunto também expressivo de variáveis, o que ocorre na prática é uma grande dificuldade em simular tais subsistemas a partir de condições iniciais correspondentes às condições operacionais de interesse. Isso se deve à complexidade da tarefa de se encontrar, dentre as muitas variáveis presentes na representação do comportamento do subsistema, um conjunto válido que corresponda a uma condição operacional de equilíbrio. A título de exemplo, se em um subsistema de uma aeronave contendo 100 variáveis de estado, 10 entradas e 20 saídas, arbitra-se os valores de todas as saídas, e de alguns estados, como sendo a especificação de uma condição operacional de interesse, é preciso ainda determinar todas as demais variáveis de forma que as derivadas temporais de todas as variáveis de estado em tempo contínuo sejam nulas, configurando assim uma condição de equilíbrio dinâmico.

Nesse contexto, o presente trabalho insere ao método original *Gradient Sampling* [Burke et al. 2005] uma restrição ao passo da direção de busca, chamando esse método aperfeiçoado de *Gradient Sampling* com Passo Limitado. Então, formula-se o problema de determinar condições de equilíbrio operacionais de sistemas dinâmicos como um problema de otimização irrestrito e aplica-se o método proposto, uma vez que, o método original (*Gradient Sampling*) não converge para as condições operacionais de interesse. Estas condições são, para sistemas dinâmicos de, aproximadamente, 40 variáveis de estado, representações de casos tipicamente encontrados em sistemas/subsistemas da aeronave, caracterizados por serem sistemas dinâmicos de estrutura variável [UTKIN 1977].

O trabalho está organizado em quatro seções, sendo esta uma introdução ao tema desse artigo. A seção 2 descreve o método proposto, *Gradient Sampling* com Passo Limitado, enfatizando todas as etapas principais do seu desenvolvimento, culminando no algoritmo 1. Já na seção 3, é formulado e resolvido o problema de se determinar as condições de equilíbrio operacionais de sistemas dinâmicos, em particular,

de um sistema termo-pneumático de 38 variáveis de estado, que representa parte de um subsistema da aeronave: o subsistema de *Bleed*, que integra o sistema de gerenciamento de ar da aeronave (AMS - *Air Management System*). Por último, seção 4, onde é realizada a conclusão do trabalho.

Gradient Sampling com Passo Limitado

O método *Gradient Sampling*, tido como núcleo do algoritmo desenvolvido, proposto em [Burke et al. 2005], é indicado para problemas de otimização irrestritos, não convexos e não continuamente diferenciáveis. Entretanto, é necessário que a função objetivo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ do problema de minimização:

$$\min f(x) \quad s.t. \ x \in \mathbb{R}^n; \quad (1)$$

seja localmente Lipschitz contínua e continuamente diferenciável em um subconjunto D , aberto e denso no $\mathbb{R}^n$, para fins da análise na teoria de otimização. [Burke et al. 2005] afirma que o método pode ser utilizado para qualquer função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em que o conjunto dos pontos não diferenciáveis D_0 possui medida zero.

A premissa de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ser localmente Lipschitz contínua permite usar a definição de ε -subdiferencial de Goldstein:

$$\partial_\varepsilon^G f(x) = cl \ conv \ \{ \partial f(y) \mid y \in B(x; \varepsilon) \}; \quad (2)$$

para definir o conjunto $G_\varepsilon^f(x)$:

$$G_\varepsilon^f(x) = cl \ conv \ \{ \nabla f(y) \mid y \in B(x; \varepsilon) \cap D \}, \quad (3)$$

onde: $cl \ conv \ \{ \mathcal{V} \}$ é a união dos conjuntos formados pelo fecho convexo do conjunto $\mathcal{V}$ e os seus pontos aderentes; $B(x; \varepsilon) = \{ y \mid \|y - x\| \leq \varepsilon \}$.

Como de fácil visualização, $G_\varepsilon^f(x) \subseteq \partial_\varepsilon^G f(x)$, possibilitando a aproximação do subdiferencial de Clark ($\partial f(x)$) [CLARKE 1983] no ponto $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\partial f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon^f(x). \quad (4)$$

Um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é ε -estacionário da função f se $0 \in \partial_\varepsilon^G f(x^*)$ e estacionário se $0 \in \partial f(x)$ [CLARKE 1983].

Assim, tem-se uma intuição do método *Gradient Sampling* para encontrar os pontos estacionários da função f . Primeiramente, arbitra-se por $\varepsilon > 0$ e busca-se iterativamente o ponto x_ε^* em que $0 \in G_\varepsilon^f(x_\varepsilon^*)$ e, conseqüentemente, $0 \in \partial_\varepsilon^G f(x_\varepsilon^*)$. Reduz-se o valor de ε para a próxima iteração, i.e. $\varepsilon_{k+1} = \mu \varepsilon$ para $\mu \in (0, 1)$, e repete-se o processo até $\varepsilon \leq \eta$ para $\eta \geq 0$, ou, o número de iterações atingir o valor máximo estipulado pelo usuário. Apesar da ideia acima ser geral, ela traduz, de modo simples, o funcionamento do método base.

Os principais pontos do método do *Gradient Sampling* com Passo Limitado são abordados nas subseções seguintes. É utilizado o acrônimo GS para a terminologia *Gradient Sampling*.

Construção dos Conjuntos

Para cada ponto corrente x^k é necessário construir um subconjunto $G_\varepsilon^f(x^k)$ que o represente, uma vez que, é impossível avaliar todos os gradientes f nos pontos do conjunto $B(x^k; \varepsilon) \cap D$. Por esse motivo, escolhe-se independente e uniformemente m pontos do conjunto aberto $B(x^k; \varepsilon) \cap D$, chamando-os de:

$$\Gamma_\varepsilon^{f,m}(x^k) = \{x^{k,0}, x^{k,1}, x^{k,2}, \dots, x^{k,m}\}, \ x^{k,0} = x^k \text{ (ponto corrente)}; \quad (5)$$

e avalia-se os gradientes da função f nesses pontos, definindo o conjunto:

$$\mathcal{G}_\varepsilon^{f,m}(x^k) = \text{conv} \{ \nabla f(x^{k,0}), \nabla f(x^{k,1}), \nabla f(x^{k,2}), \dots, \nabla f(x^{k,m}) \}. \quad (6)$$

É de fácil percepção que $\mathcal{G}_\varepsilon^{f,m}(x) \subset G_\varepsilon^f(x)$, bastando garantir que $0 \in \mathcal{G}_\varepsilon^{f,m}(x)$. Pelo teorema de Caratheodory, o valor de m deve ser $m \geq n + 1$, onde n é o número de variáveis de otimização do problema.

Definida a estratégia para gerar o conjunto $\mathcal{G}_\varepsilon^{f,m}(x^k)$, o próximo passo é o cálculo da direção de busca [NOCEDAL and WRIGHT 2006] d .

Direção de Busca Restrita a uma Caixa (*Box Constraint*)

Define-se a distância do conjunto $\mathcal{G}_\varepsilon^{f,m}(x^k)$ ao ponto $0 \in \mathbb{R}^n$ como sendo uma estimativa da medida de proximidade do conjunto $G_\varepsilon^f(x^k)$ ao ponto 0 , ou seja, $\text{dist}(0; \mathcal{G}_\varepsilon^{f,m}(x^k))$.

Sendo $\mathcal{G}_\varepsilon^{f,m}(x^k)$ um conjunto compacto e convexo, existe um único g_ε^* tal que

$$g_\varepsilon^* = \arg \min \{ \|g - 0\|_2 \mid g \in \mathcal{G}_\varepsilon^{f,m}(x^k) \}. \quad (7)$$

Este pode ser escrito como a soma convexa dos elementos do conjunto $\mathcal{G}_\varepsilon^{f,m}(x^k)$,

$$g_\varepsilon^* = \sum_{j=0}^m \alpha_j \nabla f(x^{k,j}), \quad \alpha_j \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{j=0}^m \alpha_j = 1 \quad e \quad \nabla f(x^{k,j}) \in \mathcal{G}_\varepsilon^{f,m}(x^k) \quad j = 0, \dots, m. \quad (8)$$

Calcula-se g_ε^* , nas Equações (7) e (8), através de um problema de otimização quadrático (convexo), dado por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{g,z} & z + \frac{1}{2} \|g\|_2^2 \\ \text{s.t} & \nabla f(x)^T (-g) \leq z \quad \forall x \in \Gamma_\varepsilon^{f,m}(x^k) \end{array} \right\}; \quad (9)$$

conforme [CURTIS and OVERTON 2012], e que sempre possui solução [NOCEDAL and WRIGHT 2006].

Não havendo a necessidade da direção de descida ser normalizada, como apresentado em [KIWIEL 2007], d^* pode ser calculado como parte da solução do problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{d,z} & z + \frac{1}{2} d^T H d \\ \text{s.t} & f(x^k) + \nabla f(x)^T d \leq z \quad \forall x \in \Gamma_\varepsilon^{f,m}(x^k) \end{array} \right\}, \quad (10)$$

e acrescenta-se a restrição em caixa (*box constraints*):

$$|d_i| \leq v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (11)$$

onde H é uma matriz simétrica, definida positiva e limitada, a fim de garantir uma solução d^* para o problema (10) e um decréscimo da função f no ponto x^k . Nota-se que foi adicionado o termo $f(x^k)$ às restrições, entretanto, este termo nada afeta o cálculo de d^* , apenas o valor de z ótimo e facilita a construção do problema quadrático, de maneira semelhante ao método SQP (*Sequential Quadratic Programming*) [NOCEDAL and WRIGHT 2006].

Com o objetivo de evitar grandes deslocamentos entre os iterandos x^{k+1} (próximo iterando) e x^k (iterando corrente), decidiu-se empregar uma estratégia para limitar o tamanho do vetor d (inequação (11)), a cada direção de busca, adicionando a restrição de caixa $v \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$. Demonstra-se no apêndice B [PORTELA 2018] que d^* , obtido através do problema (10) e (11), é direção de descida em $f(x^k)$.

Como a função f é uma função não-diferenciável, não-convexa e v pode ser definido empiricamente, não há garantia que aplicar integralmente a direção de descida d^* irá reduzir a função objetivo do problema (1), ou seja, $f(x^k + d^*) < f(x^k)$. Assim, é necessário uma técnica de otimização unidimensional, que visa maximizar a redução de f a partir do ponto corrente x^k na direção d^* .

Cálculo do Passo de Busca (*Line Search*)

O passo de busca é realizado via *backtracking* [NOCEDAL and WRIGHT 2006] ao longo da direção d , calculada na subseção anterior, com o objetivo de garantir a redução da função f no ponto x^k . Tem-se que a derivada direcional de f na direção d é negativa, sempre que $d \neq 0$, sendo $f'(x^k; d) = \nabla f(x^k)^T d \leq -d^T H d$ (demonstração apresentada no apêndice 3 [PORTELA 2018]). A igualdade segue pelo fato de f ser continuamente diferenciável no ponto x^k , já que $x^k \in D$.

Assim sendo, para um dado $\eta \in (0, 1)$ existe um $T > 0$ tal que:

$$f(x + td) \leq f(x) + t\eta f'(x; d) \leq f(x) - t\eta d^T H d, \forall t \in (0, T), \quad (12)$$

assegurando que a condição de Armijo (primeira desigualdade) [NOCEDAL and WRIGHT 2006] seja satisfeita.

Então, formula-se o problema de minimização unidimensional como:

$$t = \max\{\theta \mid f(x^k + \theta d) < f(x^k) - \eta \theta d^T H d, \theta \in \{1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3, \dots\}\}. \quad (13)$$

onde $\gamma \in (0, 1)$.

Próximo Iterando (x^{k+1})

Para o cálculo do próximo iterando, x^{k+1} , são adotados os procedimentos utilizados em [KIWIEL 2007]. Se $x^k + td \in D$, então $x^{k+1} = x^k + td$. Caso contrário, algumas medidas devem ser adotadas para prosseguimento do método. Admita qualquer outro ponto (x^{k+1}) satisfazendo:

$$f(x^{k+1}) < f(x^k) - t\eta d^T H d \quad (14)$$

$$\|x^k + td - x^{k+1}\| \leq \min\{t, \varepsilon\} \|d\|. \quad (15)$$

Alguns pontos devem ser enfatizados. São eles:

- o próximo iterando (x^{k+1}) sempre pertence ao conjunto D ;
- caso $x^k + td \notin D$ escolhe-se x^{k+1} através de uma distribuição uniforme definida sobre o conjunto:

$$\{y \mid \|y - (x^k + td)\| \leq \min\{t, \varepsilon\} \|d\| / i\}, \quad (16)$$

onde i deve ser incrementado até $x^{k+1} \in D$ e a equação (14) seja satisfeita. Esse processo finalizará em um número finito de iterações, já que t é escolhido de modo a satisfazer (14) e f é contínua, por hipótese.

O Algoritmo do GS com Passo Limitado

Para aproximação dos gradientes, utilizados para gerar o conjunto $\mathcal{G}_\varepsilon^{f,m}(x^k)$, empregou-se o método das diferenças finitas [NOCEDAL and WRIGHT 2006]. Já H , presente no problema quadrático (10), é uma estimativa local da matriz Hessiana para a função f , do problema original (1), no ponto corrente x^k . Para tanto, define-se, para cada iterando k :

$$g_k = \sum_{j=0}^m \lambda_j^k \nabla f(x^{k,j}) \quad (17)$$

onde: λ_j^k são os multiplicadores de Lagrange do problema quadrático (10), portanto $\sum_{j=0}^m \lambda_j^k = 1$; $\nabla f(x_k^j)$ são os gradientes avaliados nos pontos do conjunto $\Gamma_\varepsilon^{f,m}(x^k)$; g_k é uma **aproximação** do vetor de menor norma do conjunto $\partial_\varepsilon^G f(x^k)$, ambos avaliados no ponto x^k .

Algoritmo 1: GRADIENT SAMPLING COM PASSO LIMITADO

1. (*Inicialização*): Escolha $x^1 \in D$, as tolerâncias para o critério de otimalidade $v_{opt}, \varepsilon_{opt} \geq 0$, os parâmetros para a busca em linha (*Line Search*) $\eta, \gamma \in (0, 1)$, os fatores de redução $\mu, \rho \in (0, 1]$, o raio de amostragem inicial $\varepsilon_1 > 0$, o primeiro critério de otimalidade $v_1 > 0$, número de amostras por iteração $m \geq n + 1$, $H_1 = I$ (Matriz Identidade), $\Upsilon_s, \Upsilon_y, \Upsilon_{xy} > 0$ (garantir Hessiana Limitada) e a Restrição em Caixa $v \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$.
Faça $k = 1$.
2. (*Gradient Sampling*): Obtenha os conjuntos $\Gamma_\varepsilon^{f,m}(x^k) \subset (B(x; \varepsilon) \cap D)$ e $\mathcal{G}_\varepsilon^{f,m}(x^k) \subset G_\varepsilon^f(x^k)$, como apresentado em (5) e (6), respectivamente. Caso o primeiro conjunto $\Gamma_\varepsilon^{f,m}(x^k)$ não esteja contido em D , o algoritmo é finalizado.
3. (*Direção de Descida*): Faça $H = H_k$ e calcule a direção d^k , solucionando o problema quadrático (10) com a Restrição em Caixa (11). Obtenha g_k conforme equação (17).
4. (*Critério de Parada*): Se $\|g_k\| \leq v_{opt}$ e $\varepsilon_k \leq \varepsilon_{opt}$, o algoritmo é finalizado.
5. (*Atualização dos Parâmetros*): Se $\|g_k\| \leq v_k$, faça $v_{k+1} = \rho v_k$ e $\varepsilon_{k+1} = \mu \varepsilon_k$, $t_k = 0$, $x^{k+1} = x^k$ e passe para o passo 8. Caso Contrário, $v_{k+1} = v_k$ e $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$.
6. (*Backtracking*): Calcule t_k conforme (13).
7. (*Novo Iterando*): Se $x^k + t_k d^k \in D$, faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$. Caso contrário, escolha $x^{k+1} \in D$ satisfazendo (14) e (15). Atualize H_{k+1} conforme (18), respeitando as restrições (19).
8. Incrementar $k = k + 1$ e retorne ao passo 2.

Definido g_k , aplica-se o método do L-BFGS, inicializando $H \leftarrow I$ e, recursivamente, calcula-se:

$$H \leftarrow H - \frac{(Hs_l)(Hs_l)^T}{s_l^T H s_l} + \frac{y_l y_l^T}{s_l^T y_l}, \quad l = i, i-1, \dots, i-i_H+1, \quad (18)$$

onde: i_H é o número de iterandos para o método do L-BFGS; $y_l = g_l - g_{l-1}$; s_l é o deslocamento no espaço das variáveis de otimização, ou seja, $s_l = x^l - x^{l-1}$.

Ao final do processo iterativo, $H_{k+1} = H$, destacando que, em relação ao método tradicional L-BFGS [NOCEDAL and WRIGHT 2006], esse procedimento sempre estará atrasado um iterando. Já que é necessária a solução dos problemas (10) e (11) para obtenção dos multiplicadores de Lagrange λ_j^k e, consequentemente, cálculo de g_k .

Além disso, com o objetivo de garantir, conforme [CURTIS and QUE 2013], que H seja limitada (existe $\xi_{max} \geq \xi_{min} > 0$ tal que $\xi_{min} \|d\|^2 \leq d^T H d \leq \xi_{max} \|d\|^2$), H só é atualizada em (18) se:

$$\|s_l\| \leq \Upsilon_s \varepsilon, \quad \|y_l\| \leq \Upsilon_y \varepsilon \quad e \quad s_l^T y_l \geq \Upsilon_{sy} \varepsilon^2, \quad (19)$$

sendo a última condição chamada de condição de curvatura. Os parâmetros Υ_s, Υ_y e $\Upsilon_{sy} \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

Outra finalidade de g_k , é ser utilizado como critério de parada, passo 4 do algoritmo 1.

Resultados Numéricos

Para realização do experimento numérico, utilizou-se um computador com sistema operacional 64 bits, com processador Intel Xeon de 3.50 GHz e 16,0 GBytes de memória RAM. Já o algoritmo 1 foi implementado no *software* MATLAB 2012b 64-bits, fazendo o uso do pacote *Optimization Toolbox*. O sistema Termo-Pneumático escolhido está concebido no *software* Simulink.

Tabela 1: Valores Iniciais dos Parâmetros do Algoritmo 1.

Parâmetros	Valores	Parâmetros	Valores
v_{opt} (Tolerância Otimalidade)	$5,0E^{-2}$	m (número de Amostras)	$n + 1$
ϵ_{opt} (Tolerância Raio de Amostragem)	$5,0E^{-2}$	Υ_s (L-BFGS)	$1,0E^6$
η (Constante de Armijo)	$1,0E^{-7}$	Υ_y (L-BFGS)	$1,0E^6$
γ (Line Search)	$5,0E^{-1}$	Υ_{sy} (L-BFGS)	$1,0E^{-6}$
ϵ_1 (Raio de Amostragem inicial)	$7,0E^{-1}$	$L - BFGS_{iter}$ (Iterações do L-BFGS)	20
μ (Atualização ϵ_k)	$2,0E^{-1}$	k_{max} (máximo Número de Iterações)	$2,0E^3$
v_1 (Tolerância Otimalidade Inicial)	$1,0E^{-1}$	$f(x^1)$ (Função Objetivo Inicial)	$7,26E^6$
ρ (Atualização v_k)	$8,0E^{-1}$		

Tabela 2: Experimento Numérico - Sistema Termo-Pneumático

Número do Experimento	Função Objetivo Final ($f(x^k)$)	Tolerância Final (v_k)	Raio de Amostragem Final (ϵ_k)	Número de Iterações	Tempo (min)
1	$7,98E^{-4}$	$4,10E^{-2}$	$4,38E^{-2}$	1857	13,77
2	$7,97E^{-4}$	$3,28E^{-2}$	$2,19E^{-2}$	1948	14,46
3	$7,97E^{-4}$	$3,28E^{-2}$	$2,19E^{-2}$	1962	14,61
4	$7,96E^{-4}$	$2,62E^{-2}$	$1,09E^{-2}$	1677	12,50
5	$7,94E^{-4}$	$3,28E^{-2}$	$2,19E^{-2}$	1702	12,61

Define-se o problema de encontrar as condições operacionais de sistemas dinâmicos como um problema de otimização, cujo o objetivo é zerar as derivadas temporais de todas as variáveis de estado. Antes, escolheu-se, como exemplo de sistema dinâmico, o sistema Termo-Pneumático, contituído por 38 variáveis de estado e desenvolvido pela física (processo fenomenológico) do sistema, ou seja, balanço de massa e energia. O sistema dinâmico escolhido representa as tubulações de “sangria” de ar das turbinas da aeronave, equivalente, ao sistema de *Bleed*. Configura-se os parâmetros do algoritmo 1 conforme Tabela 1.

Formula-se o problema como:

$$x_{eq} = \arg \min \left(\frac{x_1^2}{b_1} + \frac{x_2^2}{b_2} + \dots + \frac{x_{38}^2}{b_{38}} \right), \quad (20)$$

onde: x_{eq} são as variáveis de estado na condição de equilíbrio; $\dot{x}_i$, para $i = 1, 2, \dots, 38$, é a taxa de variação de cada variável de estado do sistema (massa e energia); b_i , para $i = 1, 2, \dots, 38$, é a ordem de grandeza das variáveis de estado, com o objetivo de reduzir o mal escalonamento do problema de otimização. Limita-se a região de busca em 10% da ordem de grandeza das variáveis de estado, e.g. a ordem de grandeza da massa é 10^{-2} kg resultando em um passo de direção máximo de 10^{-3} kg.

A condição inicial para cada variável de estado (otimização) é apresentado na segunda coluna da Tabela 3, assim como os valores em regime estacionário na terceira coluna. Percebe-se que há uma distância entre as variáveis de estado iniciais e em regime permanente, possibilitando identificar a robustez do método do GS com Passo Limitado.

Devido a característica estocástica do método proposto, é necessário repetir o experimento numérico mais de uma vez partindo dos mesmos estados iniciais (segunda coluna da Tabela 3). Então, decidiu-se realizar cinco experimentos, sendo os resultados apresentados na Tabela 2. Em todos os experimentos o sistema atingiu a condição de regime permanente.

Conclusões

Nesse trabalho, a tarefa de se encontrar pontos de equilíbrio operacional de sistemas dinâmicos é formulado como um problema de otimização mono objetivo, não-linear, irrestrito, não-convexo e não

Tabela 3: Valor das Variáveis de Estado em Regime Estacionário do Sistema Termo-Pneumático

Variáveis de Estado	Valor Inicial	Valor Final	Variáveis de Estado	Valor Inicial	Valor Final
Volume 1 - Energia	2,68E ⁺³	6,77E ⁺³	Volume 10 - Energia	4,05E ⁺³	8,80E ⁺³
Volume 1 - Massa	6,90E ⁻³	1,75E ⁻²	Volume 10 - Massa	1,05E ⁻²	1,89E ⁻²
Volume 2 - Energia	3,24E ⁺³	5,98E ⁺³	Volume 11 - Energia	1,49E ⁺³	4,22E ⁺³
Volume 2 - Massa	8,36E ⁻³	1,54E ⁻²	Volume 11 - Massa	3,83E ⁻³	9,07E ⁻³
Volume 3 - Energia	1,49E ⁺³	3,71E ⁺³	Volume 12 - Energia	2,38E ⁺³	6,46E ⁺³
Volume 3 - Massa	3,83E ⁻³	9,57E ⁻³	Volume 12 - Massa	6,13E ⁻³	1,39E ⁻²
Volume 4 - Energia	2,38E ⁺³	5,90E ⁺³	Volume 13 - Energia	2,97E ⁺³	7,69E ⁺³
Volume 4 - Massa	6,13E ⁻³	1,52E ⁻²	Volume 13 - Massa	7,67E ⁻³	1,65E ⁻²
Volume 5 - Energia	2,53E ⁺³	6,23E ⁺³	Volume 14 - Energia	1,62E ⁺³	2,23E ⁺³
Volume 5 - Massa	6,52E ⁻³	1,61E ⁻²	Volume 14 - Massa	4,18E ⁻³	6,38E ⁻³
Volume 6 - Energia	3,89E ⁺³	5,17E ⁺³	Volume 15 - Energia	2,97E ⁺³	4,63E ⁺³
Volume 6 - Massa	1,00E ⁻²	1,15E ⁻²	Volume 15 - Massa	7,67E ⁻³	1,33E ⁻²
Volume 7 - Energia	2,97E ⁺³	4,50E ⁺³	Volume 16 - Energia	2,97E ⁺³	6,35E ⁺³
Volume 7 - Massa	7,67E ⁻³	1,00E ⁻²	Volume 16 - Massa	7,67E ⁻³	1,82E ⁻²
Volume 8 - Energia	2,53E ⁺³	5,20E ⁺³	Volume 17 - Energia	2,38E ⁺³	5,82E ⁺³
Volume 8 - Massa	6,52E ⁻³	1,16E ⁻²	Volume 17 - Massa	6,13E ⁻³	1,31E ⁻²
Volume 9 - Energia	2,97E ⁺³	9,13E ⁺³	Volume 18 - Energia	2,97E ⁺³	6,43E ⁺³
Volume 9 - Massa	7,67E ⁻³	1,96E ⁻²	Volume 18 - Massa	7,67E ⁻³	1,45E ⁻²
			Volume 19 - Energia	2,97E ⁺³	5,42E ⁺³
			Volume 19 - Massa	7,67E ⁻³	1,22E ⁻²

continuamente diferenciável, havendo a necessidade da escolha de um método numérico de otimização que versa sobre essas características matemáticas. Por isso, escolheu-se o método do *Gradient Samplig* [Burke et al. 2005], limitando o espaço da direção de busca a fim de impedir grandes deslocamentos entre os iterandos, principal obstáculo de problemas de otimização mal escalonados. Verificou-se o funcionamento do método na seção de Resultados Numéricos, em que se utilizou um sistema termo-pneumático de 38 variáveis de estado a fim de alcançar o objetivo proposto.

Referências

- BURKE, J. V., LEWIS, A., and OVERTON, M. L. A robust gradient sampling algorithm for nonsmooth, nonconvex optimization. **SIAM Journal Optimization**, v. 15, p. 751 - 779, 2005.
- CLARKE, F. H. **Optimization and Nonsmooth Analysis**. 1. ed. John Wiley, 1983.
- CURTIS, F. E., OVERTON, A Sequential Quadratic Programming Algorithm for NonConvex, NonSmooth Constrained Optimization. **SIAM Journal Optimization**. v. 22, n.2, p. 474 - 500, 2012.
- CURTIS, F. E., QUE, X. An adaptive gradient sampling algorithm for non-smooth optimization. **Optimization Methods and Software**. v. 28, n.6, p. 1302 - 1324, 2013.
- KIWIEL, K. C. Convergence of the Gradient Sampling Algorithm for Nonsmooth, Nonconvex Optimization. **SIAM Journal Optimization**. v. 18, pag. 379 - 388, 2007.
- NOCEDAL, J., WRIGHT, S. J. **Numerical Optimization**. 2. ed., v. 1. Springer Ser. Oper. Res., 2006.
- PORTELA, L.A. **O método do gradient sampling com comprimento de passo limitado aplicado ao problema de determinação das condições de equilíbrio operacionais de sistemas dinâmicos**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica)-UFMG, Belo Horizonte, 2018.
- UTKIN, V. I. Variable Structure Systems with Sliding Modes. **IEEE**, v. 22, pag. 212 - 222, 1977.

Modelagem matemática e simulação numérica do problema de dispersão de poluentes ao redor de um prédio cúbico

Larissa Santos Coutinho Jorge
Universidade Federal do Espírito Santo
coutinho.larissa@hotmail.com

Fernanda Capucho Cezana
Instituto Federal do Espírito Santo - Campus São Mateus
fecezana@ifes.edu.br

Isaac Pinheiro dos Santos
Universidade Federal do Espírito Santo
isaac.santos@ufes.br

Resumo: O objetivo deste trabalho foi investigar o problema do escoamento e da dispersão de poluentes ao redor de um obstáculo cúbico isolado. Foram realizadas simulações numéricas considerando a atmosfera neutra e diferentes localizações da fonte de poluentes. A modelagem matemática é baseada na solução das equações de conservação (massa, quantidade de movimento e espécie química), com a utilização do modelo de turbulência $k - \omega$ SST para o regime estacionário, que é um híbrido dos modelos $k - \varepsilon$ padrão e $k - \omega$. O método de volumes finitos baseados em elementos é utilizado para a simulação numérica, através da utilização do código computacional comercial ANSYS - CFX. São feitas comparações entre os campos de velocidade obtidos no presente estudo e outras simulações numéricas e túnel de vento. Também são feitas comparações dos resultados de concentração obtidos no presente estudo com o objetivo de avaliar a influência que a localização de um prédio cúbico exerce sobre o escoamento e dispersão de poluentes advindos de seis fontes distintas.

Palavras-chave: Dispersão de poluentes. Prédio cúbico. Modelo de turbulência. Simulação numérica.

Introdução

Segundo o Conselho Nacional do Meio Ambiente (CONAMA), entende-se por poluente atmosférico qualquer forma de matéria ou energia com intensidade e em quantidade, concentração, tempo ou características em desacordo com os níveis estabelecidos, e que tornem ou possam tornar o ar impróprio, nocivo ou ofensivo à saúde, inconveniente ao bem-estar público, danoso aos materiais, à fauna e flora ou prejudicial à segurança, ao uso e gozo da propriedade e às atividades normais da comunidade.

Em ambientes urbanos o fenômeno da poluição atmosférica é ainda mais grave, pois há a presença massiva de fontes emissoras, também pelo fato de que as pessoas frequentam diversos lugares diariamente e pela variabilidade da concentração em ambientes exteriores e interiores, tornando-se assim um parâmetro de difícil avaliação. A interação dos ventos com as superfícies dos prédios em áreas urbanas, torna o escoamento altamente turbulento. Dessa forma, a dispersão de poluentes será fortemente influenciada pelo escoamento turbulento gerado nessas regiões.

Velocidade do vento, direção e estabilidade atmosférica são parâmetros meteorológicos primários que influenciam de forma direta a dispersão de material impactante na atmosfera e a qualidade do ar, e esta por sua vez é determinada pela amplitude das emissões, transporte e dispersão na atmosfera. Os poluentes não são facilmente dispersados para fora dos ambientes urbanos e assim degradam a qualidade do ar (MICHIOKA; TAKIMOTO; SATO, 2014), além de causar outros diversos impactos ambientais. Diante do exposto, se faz necessário estudos acerca da dispersão de poluentes no ar.

Os processos de transporte e dispersão de poluentes constituem fenômenos de alta complexidade e devido à isso, há a necessidade da utilização de modelos matemáticos que possam descrever e interpretar

dados/resultados experimentais, identificar fontes emissoras e avaliar seus impactos, controlar a qualidade do ar etc. Atualmente, alguns modelos computacionais baseados nas Equações Médias de Reynolds (RANS) vêm sendo bastante utilizados para estudo sobre dispersão de poluentes (HE et al., 2017) e são atrativos devido aos seus baixos custos computacionais.

Há desafios para simulação numérica de escoamentos ao redor de obstáculos, em especial no que diz respeito à modelagem da turbulência nas proximidades do obstáculo (CEZANA, 2007). A dispersão de contaminantes em torno dos edifícios é caracterizada pela interação complexa entre o fluxo atmosférico e o escoamento ao redor dos edifícios (TOMINAGA; STATHOPOULOS, 2013). Com um rápido desenvolvimento em *hardware* e algoritmos numéricos, as técnicas de dinâmica de fluidos computacionais (CFD) são amplamente utilizadas para estudar fenômenos de dispersão de poluentes em ambientes urbanos (LI et al., 2006).

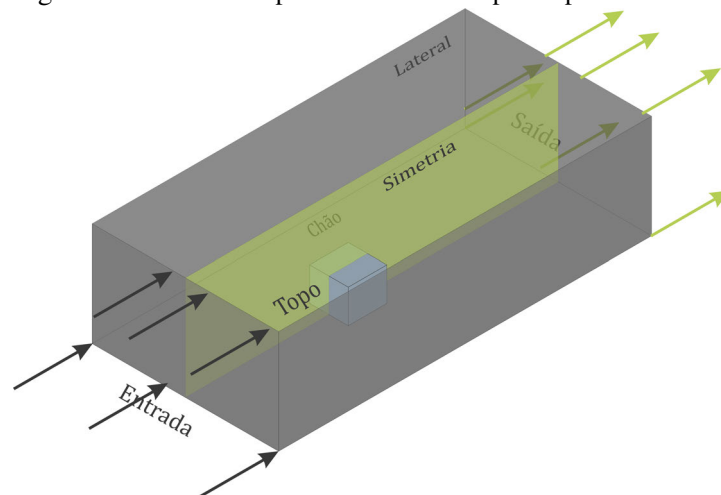
Neste trabalho são apresentadas as equações que compõem o modelo matemático e o modelo de turbulência utilizado, como o objetivo de investigar a dispersão de poluentes ao redor de um obstáculo cúbico isolado. Além disso, são apresentados os detalhes da simulação numérica empregada. Para obtenção das soluções foi utilizado o código comercial de dinâmica dos fluidos computacional *ANSYS-CFX 14.5*, onde as equações de conservação são discretizadas via método de volumes finitos baseado em elementos.

Metodologia

Problema de estudo: escoamento ao redor de um prédio cúbico

O presente estudo trata da dispersão de poluentes ao redor de um obstáculo cúbico de altura $H_b=1$ (veja Figura 1), sob condições atmosféricas neutras, no qual o gradiente de temperatura está próximo ao gradiente adiabático seco, implicando na inexistência de tendência de um volume ganhar ou perder flutuação.

Figura 1: Domínio computacional utilizado para o presente estudo.



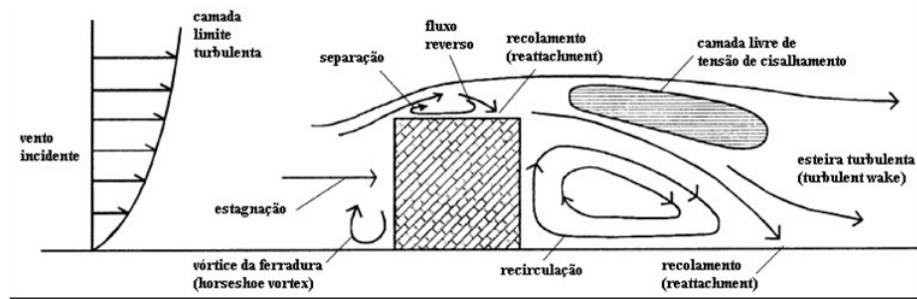
Em um escoamento turbulento atmosférico há a presença de vórtices de diversos tamanhos e a intensidade desses vórtices definem o espectro de turbulência. Outros fatores também colaboram para a geração de um movimento turbulento, como a velocidade de escoamento e a existência de obstáculos.

Na Figura 2 há um perfil de velocidades não uniforme, e nesse perfil há a tendência de criação de uma zona de recirculação próxima da face frontal do prédio, invertendo assim o sentido do escoamento nesta região. O vórtice formado é desenvolvido nos arredores do prédio por meio de efeitos convectivos e recebe o nome de vórtice em ferradura (*horseshoes vortex*).

No topo e laterais do prédio o escoamento adquire direção oposta à direção principal do escoamento e há uma separação no escoamento. Seguindo na direção principal do escoamento, vemos que após a separação todo o escoamento volta a se mover numa mesma direção, o ponto onde ocorre tal fenômeno é denominado *ponto de recolamento*.

Ao passar pelo prédio ocorre a geração de instabilidades e estas por sua vez persistem por um determinado período após o escoamento superar o obstáculo, no momento em que tais instabilidades são dissipadas o perfil do vento incidente é restabelecido. Regiões mais afastadas do prédio onde há a presença de instabilidades, são chamadas de esteiras turbulentas. A esteira turbulenta quando comparada à região do perfil de vento incidente, possui menor velocidade média e maior intensidade de turbulência (CEZANA, 2007).

Figura 2: Representação esquemática do escoamento ao redor de um prédio cúbico - vista do plano central (CEZANA, 2007 apud MURAKAMI, 1993).



Modelo matemático e modelo de turbulência

O modelo matemático para o presente estudo consiste em achar os campos de velocidades, pressão e concentração da espécie química através do sistema de equações diferenciais parciais,

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = b_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j \bar{C}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{u}'_j \bar{C}'}{\partial x_j} + \alpha \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_j \partial x_j} + f. \quad (3)$$

A equação (1) é a equação média de continuidade, o termo $\bar{u}_j$ representa o campo médio de velocidade. Na equação média de Navier-Stokes (eq. (2)), os termos b_i , ρ , $\bar{p}$, representam respectivamente, as forças de corpo que atuam sobre o fluido, a massa específica do fluido e o campo médio de pressão. O termo τ_{ij} é definido como

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade do fluido. Já na equação média de concentração de massa da espécie química (eq. (3)), os termos $\bar{C}$, α e f representam a concentração média, o coeficiente de difusividade do fluido e o termo fonte, respectivamente.

Como neste sistema já são consideradas as médias de Reynolds, novos termos associados à fluxos turbulentos surgiram. Desse modo, um modelo de turbulência deve ser utilizado para fechamento do problema.

O modelo de turbulência utilizado no presente estudo foi o $k - \omega$ SST, elaborado por Menter (1994), sendo uma variação do modelo $k - \omega$. Apresenta duas equações de transporte, uma para equação da

energia cinética turbulenta (k) e outra para a taxa de dissipação específica da energia cinética turbulenta (ω), equações 4 e 5 respectivamente. Ele foi criado devido à grande sensibilidade do modelo $k - \omega$ à variações nas condições de corrente livre.

O modelo $k - \omega$ SST é composto do modelo $k - \varepsilon$ padrão e do modelo $k - \omega$. Para mais informações sobre os modelos $k - \omega$ e $k - \varepsilon$, consulte Wilcox (1994).

Para o regime estacionário o modelo $k - \omega$ SST é dado por

$$\frac{\partial(k\bar{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\mu}{\rho} + \sigma^* \cdot \nu_t \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \beta^* k \omega + P_k, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\omega\bar{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\mu}{\rho} + \sigma_\omega \cdot \nu_t \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] - \beta \omega^2 - \\ - \alpha \frac{\omega}{k} \left(\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (5)$$

Os termos α , β , β^* , σ_ω , $\sigma_{\omega 2}$ e σ^* são parâmetros de calibração do modelo e são dados por:

$$\alpha = \frac{5}{9}, \beta = \frac{3}{40}, \beta^* = \frac{9}{100}, \sigma_\omega = \frac{1}{2}, \sigma^* = \frac{1}{2} \text{ e } \sigma_{\omega 2} = 0,856.$$

A função P_k (*Production Limiter*) tem o objetivo de controlar a produção de energia cinética turbulenta nas regiões de estagnação, como as regiões frontal e laterais do obstáculo (COSTA, 2016) e é dada por:

$$P_k = \min(P_k, C_{lim}, \rho \varepsilon).$$

O termo C_{lim} é definido como *Clip Factor*.

O termo F_1 é definido como:

$$F_1 = \tanh \left\{ \left\{ \min \left(\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right); \frac{4 \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right) \right\}^4 \right\}, \quad (6)$$

onde,

$$CD_{k\omega} = \max \left(2 \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right) \quad (7)$$

e y é a distância da superfície de não deslizamento.

No modelo $k - \omega$ SST a viscosidade turbulenta ($\nu_t = \frac{k}{\omega}$) é modificada para melhor representar os efeitos de transporte de tensão cisalhante e desse modo, permite resolver um número maior de problemas do que os resolvidos pelo modelo $k - \varepsilon$ (COSTA, 2016). Assim, ν_t é dada por

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max \left(a_1 \omega, (S_{ij} S_{ij})^{\frac{1}{2}} F_2 \right)}, \quad (8)$$

onde,

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad F_2 = \tanh \left[\left[\max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right] \quad \text{e} \quad a_1 = 0,31.$$

A utilização do modelo SST se deve ao fato do seu melhor desempenho em regiões próximas à parede, já que em tais regiões o modelo $k - \omega$ é utilizado. Ao passo que o modelo $k - \varepsilon$ é utilizado em regiões distantes da parede. Para completar o modelo matemático são necessárias condições de contorno apropriadas.

Condições de contorno

Na entrada foram impostos perfis verticais de velocidade, energia cinética turbulenta (k) e dissipação específica da energia cinética turbulenta (ω). No chão/parte inferior e paredes do prédio foi utilizada a condição de não deslizamento (*no slip*). A condição de deslizamento livre (*free slip*) foi utilizada nas laterais do domínio e no topo. Na saída, a condição usada foi de escoamento totalmente desenvolvido (*outflow*), onde as derivadas de todas as variáveis na direção principal são nulas. A condição simetria foi aplicada à parede lateral que está localizada na metade do domínio, no qual as derivadas das variáveis de interesse são iguais à zero nessa região. Veja na tabela 1, onde W_H é a velocidade na altura do prédio, C_μ é uma constante empírica, x_3 é a altura e κ é a constante de Vón Karman, detalhes das condições de contorno na entrada.

Tabela 1: Condições de contorno utilizadas para o experimento realizado por Murakami et al. (1996)

Localização	Condição de contorno
entrada	$\overline{u_1} \propto x_3^{1/4}, \overline{u_2} = \overline{u_3} = 0, k = 0.025W_H^2, \omega = \frac{\sqrt{k}}{C_\mu^{1/4}\kappa x_3}$

Resultados e Discussão

Neste seção são apresentados os resultados das simulações numéricas para o escoamento e dispersão de poluentes, considerando-se seis diferentes localizações de uma fonte pontual de poluentes.

Escoamento ao redor de um obstáculo cúbico isolado: validação da modelagem

É apresentado a seguir o resultado do escoamento ao redor de um osbtáculo cúbico isolado. Foi realizado um teste de malha para este problema, verificando-se a independência da solução em relação a malha. Para este teste, foram realizadas simulações numéricas com três diferentes malhas: a malha 1 com 500 mil nós, a malha 2 com 1 milhão de nós e a malha 3 com 2 milhões de nós.

A Figura 3 mostra o campo de velocidade média na simetria do prédio, obtido a partir do túnel de vento e LES realizado por Murakami (1993), do modelo ω realizado por Cezana (2007) e do modelo $k - \omega$ SST realizado no presente estudo (utilizando a malha 2). Em todas as simulações houve a criação da zona de recirculação antes do prédio e depois do prédio, além da região de fluxo reverso no topo do prédio. Portanto, as características observadas no presente estudo estão condizentes com as da literatura.

Influência da localização das fontes na dispersão de poluentes ao redor do prédio

A primeira fonte (fonte 1) foi posicionada em $2H_b$ à montante do prédio e na metade de sua altura, a segunda (fonte 2) também em $2H_b$ à montante, na altura do prédio; a terceira (fonte 3) no centro do topo do prédio, a quarta fonte (fonte 4) foi posicionada em $2H_b$ à jusante do prédio, na metade de sua altura; a quinta (fonte 5) também em $2H_b$ à jusante, na altura do prédio; e a sexta fonte (fonte 6) está localizada imediatamente na saída do prédio.

A Figura 4 mostra a distribuição de concentração no plano de simetria a partir das seis fontes. Nota-se a partir da Figura 4-a, que o escoamento advindo da fonte 1 tem maior concentração e menor diluição de contaminantes na zona de recirculação antes da entrada do prédio. Na Figura 4-b vemos que a pluma proveniente da fonte 2 possui maior concentração na região do topo do prédio e comparada à fonte 1, a área após o obstáculo onde ocorre a diluição do poluente é maior. Já a fonte 3 dispersa mais poluentes na zona de recolamento depois do prédio (Figura 4-c) comparadas às fontes 1 e 2, já que possui

maior concentração nesta região. Devido a direção dos ventos, as fontes 4 e 5 (Figuras 4-d e 4-e) não exercem influência na dispersão de contaminantes ao redor do prédio, sendo estes carregados na direção do escoamento. A maior concentração e menor diluição de contaminantes na zona de recolamento após o obstáculo ocorre a partir da fonte 6.

Figura 3: Comparação entre os campos de velocidade no plano de simetria para diferentes modelos de turbulência. (a) Túnel de Vento (MURAKAMI, 1993), (b) LES (MURAKAMI, 1993), (c) ω (CEZANA, 2007), (d) $k - \omega$ SST (Presente estudo).

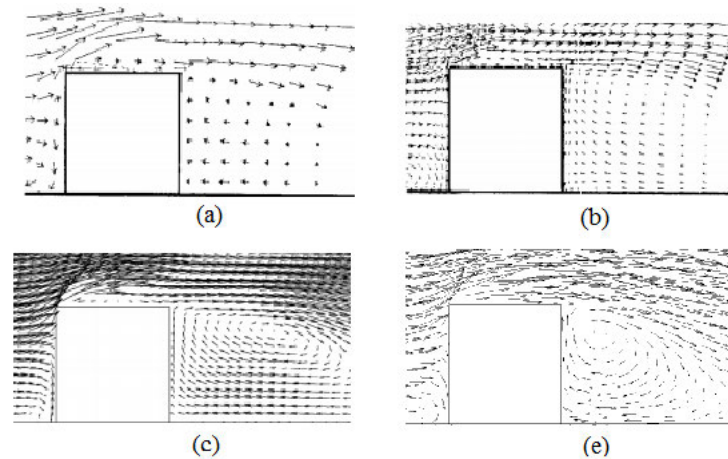
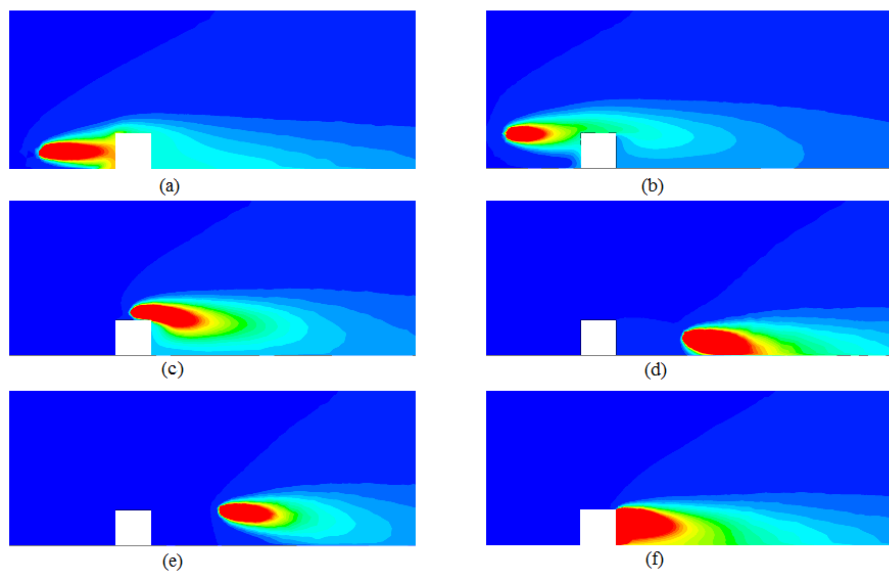


Figura 4: Distribuição de concentração no plano de simetria sob condições atmosféricas neutras. (a) fonte 1, (b) fonte 2, (c) fonte 3, (d) fonte 4, (e) fonte 5 e (f) fonte 6.



Conclusões

Neste trabalho foram apresentadas as equações que compõem o modelo matemático que descreve o fenômeno da dispersão de poluentes e o modelo de turbulência. Também foram apresentados os detalhes da simulação numérica empregada para a avaliação das influências da localização de seis fontes distintas sobre o escoamento e dispersão de poluentes ao redor de um prédio cúbico sob condições atmosféricas neutras.

O modelo matemático do presente estudo é composto das equações médias de Navier-Stokes acoplada à equação média de conservação de massa da espécie química.

O modelo de turbulência escolhido para realização das simulações foi o $k - \omega$ SST, que utiliza técnicas de modelagem RANS. A sua escolha se deve ao seu baixo custo computacional comparado à outros modelos de turbulência e por apresentar melhor desempenho em regiões próximas à paredes.

Para obtenção das soluções numéricas foi utilizado o código comercial de Dinâmica dos Fluidos Computacional CFX, onde as equações do modelo matemático são discretizadas via método de volumes finitos baseado em elementos.

As condições de contorno empregadas para as simulações do presente estudo foram utilizadas de acordo com Murakami et al. (1996).

O modelo $k - \omega$ SST, empregado no presente estudo conseguiu prever o descolamento do escoamento na região frontal do prédio e seu posterior recolamento no topo do prédio. Quanto à localização das fontes, foi possível perceber que de fato em algumas situações a presença do prédio influenciou na dispersão e concentração de poluentes. Sendo que os escoamentos advindos de fontes localizadas à montante do obstáculo sofreu mais influência da presença do prédio. Enquanto que para os escoamentos advindos de fontes à jusante, isso não ocorreu. Na condição atmosférica neutra, a presença de ventos moderados/fortes fizeram com que a dispersão de poluentes ocorresse no sentido do escoamento, sendo carregados por distâncias consideráveis e diluindo-se em regiões próximas do chão.

Referências

- CEZANA, F. C. **Simulação numérica da dispersão de poluentes ao redor de um obstáculo isolado sob diferentes condições de estabilidade**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Engenharia Ambiental. Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória-ES. Brasil. 2007.
- COSTA, I. B. **Avaliação de desempenho do modelo de turbulência $k - \omega$ SST para dispersão de poluentes ao redor de obstáculo cúbico em diferentes condições de estabilidade atmosférica**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Engenharia Ambiental. Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória-ES. Brasil. 2016.
- HE, L.; HANG, J.; WANG, X.; LIN, B.; LI, X.; LAN, G. Numerical investigations of flow and passive pollutant exposure in high-rise deep street canyons with various street aspect ratios and viaduct settings. **Science of the Total Environment**, v. 584-585, p. 189-206, 2017.
- LI, X.-X.; LIU, C.-H.; LEUNG, D. Y. C.; LAM, K. M. Recent progress in cfd modelling of wind field and pollutant transport in street canyons. **Atmospheric Environment**, v. 40, p. 5640-5658, 2006.
- MENTER, F. R. Two equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. **AIAA JOURNAL**, v. 32, n.8, p. 1598-1605, 1994.
- MICHIOCA, T.; TAKIMOTO, H.; SATO, A. Large-eddy simulation of pollutant removal from a three-dimensional street canyon. **Boundary-Layer Meteorology**, v.150, p. 259-275, 2014.
- MURAKAMI, S.; KATO, S.; MOCHIDA, A.; OOKA, R.; IIZUCA, S. Numerical prediction of flow around a building with various turbulence models: Comparison of $k - \epsilon$ EVM, ASM, DSM, and LES with wind tunnel tests. **ASHRAE Transactions**, 1996. p. 741-753.
- PONTES, J.; MANGIAVACCHI, N. **Fenômenos de Transferência com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia..** Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- TOMINAGA, Y.; STATHOPOULOS, T. CFD simulation of near-field pollutant dispersion in the urban environment: A review of current modeling techniques. **Atmospheric Environment**, v. 79, p.716-730, 230.
- WILCOX, D. C. **Turbulence Modeling for CFD**. DCW Industries, 1994.

Um método variacional multiescala aplicado as equações de Navier-Stokes incompressíveis

Riedson Baptista

Departamento de Matemática Aplicada - UFES, São Mateus
riedson.baptista@ufes.br

Lucia Catabriga

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Isaac P. Santos

Departamento de Matemática Aplicada - UFES, São Mateus
isaac.santos@ufes.br

Resumo: Neste trabalho apresentamos um método de elementos finitos multiescala variacional para resolver as equações de Navier-Stokes incompressíveis. O método proposto consiste de uma decomposição para os campos de velocidade e pressão em escalas macro (resolvidas) e micro (não resolvidas) juntamente com um operador não linear baseado em resíduos para a formulação de Galerkin enriquecida. Esta escolha de decomposição é mostrada como favorável para simular fluxos com alto número de Reynolds. Este operador introduz uma viscosidade artificial somente na micro escala da discretização. Para melhorar a convergência do processo não-linear, usamos um fator de amortecimento dinâmico, no qual muitas vezes é essencial para a convergência do processo iterativo e para a redução do número de iterações. Resultados detalhados são apresentados e comparações são feitas com soluções apresentadas na literatura para o problema de fluxo na cavidade bidimensional com número de Reynolds elevado.

Keywords: Formulação multiescala. Equações de Navier-Stokes. Escoamento na cavidade bidimensional. Número de Reynolds elevado. .

Introdução

Muitos fenômenos de interesse científico e de engenharia são modelados pelas equações de Navier-Stokes, compostas por equações de momentum e continuidade com campo de velocidade e pressão como as incógnitas. Como a pressão é uma incógnita nas equações de momentum, mas não na equação de continuidade, a discretização deve satisfazer a condição Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) (BREZZI, 1974). Esta condição faz uma relação entre pressão e aproximação de velocidade que aumenta o número de graus de liberdade, tornando a solução do sistema linear mais dispendiosa. Por causa disso, a maioria das técnicas e cálculos de elementos finitos relatados nas últimas três décadas são baseadas em formulações estabilizadas (BROOKS; HUGHES, 1982; HUGHES; TEZDUYAR, 1984). Outra fonte de dificuldade numérica deve-se à presença do termo não linear convectivo.

Em meados da década de 1990, a metodologia variacional multiescala (*Variational Multiscale* - VMS) foi introduzida por Hughes em (HUGHES, 1995) como uma técnica para modelar as escalas sub-malhas na solução de equações diferenciais parciais, especialmente a equação de transporte com advecção dominante. Desde então, alguns métodos multiescala foram desenvolvidos para problemas de fluxo incompressíveis como em (MASUD; KHURRAM, 2006). Métodos variacionais não-lineares multiescalas foram desenvolvidos na última década, dos quais destacamos alguns métodos livres de parâmetros: o NSGS (*Nonlinear Subgrid Stabilization method*) (SANTOS; ALMEIDA, 2007; SANTOS; ALMEIDA; MALTA, 2012) e o DD (método de Difusão Dinâmica) (VALLI et al., 2018) para resolver problemas de transporte com advecção dominante; e o método NMV (*Nonlinear Multiscale Viscosity*) (BENTO et al., 2016) para resolver o sistema de equações de Euler compressíveis.

Neste trabalho, apresentamos o método não-linear multiescala livre de parâmetros para resolver problemas dados pelas equações de Navier-Stokes incompressíveis, denominado método NSGS-NS, desenvolvido em (BAPTISTA et al., 2018). Avaliamos a eficiência da formulação através de estudos numéricos

sobre o problema de fluxo na cavidade bidimensional, onde os resultados são comparados com os apresentados em (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005).

Formulação de elementos finitos multi escalas

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$ com fronteira regular por parte Γ . O conjunto de equações de Navier-Stokes incompressíveis e estacionárias é dada por

$$(u \cdot \nabla)u - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(u) + \nabla p = f, \text{ in } \Omega, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \text{ in } \Omega, \quad (2)$$

onde u e p denotam a velocidade e a pressão cinemática, ν é a viscosidade cinemática, f são as forças de corpo, e $\varepsilon(u)$ é a tensor das tensões definido por $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$. Um conjunto apropriado de condições de contorno é adicionado as Equações. (1) e (2).

Para definir a discretização de elementos finitos, consideramos uma partição triangular $\mathcal{T}_h$ do domínio Ω em n_{el} elementos, onde $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega_e$ e $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, \dots, n_{el}$, $i \neq j$. Os espaços de aproximação são decompostos em uma soma direta do espaço na escala resolvida (ou macro escala) com um espaço na escala não resolvida(ou micro escala). Nós definimos

$$\mathcal{U}_h = \{u_h \in [H^1(\Omega)]^2; u_h|_{\Omega_e} \in [\mathbb{P}_1(\Omega_e)]^2, u_h = g \text{ on } \Gamma_g\}$$

como espaço discreto na escala resolvida para a velocidade, onde $\mathbb{P}_1(\Omega_e)$ representa o conjunto de funções polinomiais de primeira ordem em Ω_e e H^1 o espaço de Hilbert (BRENNER; SCOTT, 2002). A micro escala é definida usando funções bolhas a fim de reduzir o custo computacional tipicamente de métodos de duas escalas. Denotando por $\psi_b \in H_0^1(T)$ as funções bolhas definidas em cada elemento, seja

$$\mathcal{U}_B = \{u_B \in [H_0^1(\Omega)]^2; u_B|_{\Omega_e} \in [span(\psi_B)]^2, \forall \Omega_e \in \mathcal{T}_h\}$$

o espaço na micro escala para a velocidade. Analogamente, definimos os espaços para a pressão na macro e micro escala,

$$\mathcal{P}_h = \{p_h \in H^1(\Omega); p_h|_{\Omega_e} \in \mathbb{P}_1(\Omega_e), \int_{\Omega} p_h d\Omega = 0\},$$

$$\mathcal{P}_B = \{p_B \in H_0^1(\Omega); p_B|_{\Omega_e} \in span(\psi_B), \forall \Omega_e \in \mathcal{T}_h\}.$$

Introduzimos dois espaços adicionais, como soma direta dos espaços acima definidos, $\mathcal{U}_E = \mathcal{U}_h \oplus \mathcal{U}_B$ para a velocidade e $\mathcal{P}_E = \mathcal{P}_h \oplus \mathcal{P}_B$ para a pressão.

A formulação numérica usada neste trabalho pode ser encontrada em (BAPTISTA et al., 2018), a qual segue metodologia multiescala variacional, decompondo o problema em dois subproblemas, como descrito em (HUGHES et al., 1998): um associado às escalas resolvidas (ou macro) e outro associado às não resolvidas (ou micro). A inclusão da micro escala influencia a estabilização da solução. De maneira semelhante ao método NSGS (SANTOS; ALMEIDA, 2007; SANTOS; ALMEIDA; MALTA, 2012), adicionamos à formulação numérica um operador não linear baseado em resíduos apenas na micro escala. O método NSGS aplicado as equações de Navier-Stokes consiste em encontrar $u_E = u_h + u_B \in \mathcal{U}_E$ e $p_E = p_h + p_B \in \mathcal{P}_E$, com $u_h \in \mathcal{U}_h$, $u_B \in \mathcal{U}_B$, $p_h \in \mathcal{P}_h$ e $p_B \in \mathcal{P}_B$, tais que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_E \cdot (u_E \cdot \nabla u_E - f) d\Omega + 2\nu \int_{\Omega} \varepsilon(w_E) : \varepsilon(u_E) d\Omega - \int_{\Omega} p_E \nabla \cdot w_E d\Omega \\ + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nabla w_B : (\delta_B \nabla u_B) d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} q_E \nabla \cdot u_E d\Omega = 0 \end{aligned}$$

$\forall w_E = w_h + w_B \in \mathcal{V}_E$ e $\forall q_E = q_h + q_B \in \mathcal{P}_E$ com $w_h \in \mathcal{V}_h, w_B \in \mathcal{U}_B, q_h \in \mathcal{P}_h$ e $q_B \in \mathcal{P}_B$, onde $\mathcal{V}_E = \mathcal{V}_h \oplus \mathcal{U}_B$ com $\mathcal{V}_h = \{\mathbf{w}_h \in [H^1(\Omega)]^2; \mathbf{w}_h|_{\Omega_e} \in [\mathbb{P}_1(\Omega_e)]^2, \mathbf{w}_h = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma\}$. A quantidade de viscosidade artificial δ_B é calculada no nível do elemento por

$$\delta_B(u_h, p_h) = \begin{cases} \frac{h}{2} \frac{\|R(u_h, p_h)\|}{\|\nabla(u_h, p_h)\|}, & \text{se } \|\nabla(u_h, p_h)\| > 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde $\|\cdot\|$ é anorma euclidiana, $R(u_h, p_h) = (u_h \cdot \nabla)u_h - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(u_h) + \nabla p_h + \nabla \cdot u_h - f$ é o resíduo do problema associado a macro escala em Ω_e e h é parâmetro de malha proposto em (TEZDUYAR, 2001).

Fator de amortecimento

Para melhorar a convergência do método iterativo não linear, utilizamos um processo dinâmico de fator de correção, ou amortecimento (*Damping factor*) sugerido em (JOHN; KNOBLOCH, 2008). Aplicado ao método NSGS-NS, este permite tratar problemas com número de Reynolds elevados. Uma escolha apropriada do fator de amortecimento é frequentemente essencial para a convergência do processo iterativo não linear e o número de iterações. A escolha dinâmica do fator de amortecimento está ilustrada no algoritmo 1. Nossa abordagem contém um número de parâmetros, cujos valores para os resultados apresentados para este experimento são dados nas linhas 1 e 2.

Algorithm 1 Fator de Amortecimento

```

1:  $\omega_{min} := 0.1, \omega_{max} := 1.0$ ;
2:  $c_1 := 1.001, c_2 := 1.1, c_3 := 1.001, c_4 := 0.9$ ;
3: Inicialize a solução  $u_h^0$  e o resíduo  $r^0$ ;
4:  $\omega := \omega_{max}, k := 0, cont := 1$ ;
5: enquanto  $r^k > tolerance$  faça
6:   compute  $\tilde{u}_h^{k+1}$ ;
7:    $first-damping := 1$ ;
8:   enquanto  $cont = 1$  faça
9:      $u_h^{k+1} := u_h^k + \omega(\tilde{u}_h^{k+1} - u_h^k)$ ;
10:    compute  $r^{k+1}$ ;
11:    se  $r^{k+1} < r^k$  ou  $\omega \leq c_1 \omega_{min}$  então
12:      se  $r^{k+1} < r^k$  e  $first-damping=1$  então
13:         $\omega_{max} := \min\{1, c_3 \omega_{max}\}$ ;
14:         $\omega := \min\{\omega_{max}, c_2 \omega\}$ ;
15:      fim se
16:      senão
17:         $\omega := \max\{\omega_{min}, \omega/2\}$ 
18:        se  $first-damping=1$  então
19:           $\omega_{max} := \max\{\omega_{min}, \omega_{max}\}$ ;
20:           $first-damping := 0$ ;
21:        fim se
22:         $cont := 0$ ;
23:      fim se
24:       $k := k + 1$ ;
25:    fim enquanto
26:  fim enquanto

```

As principais características desta abordagem são que o fator de amortecimento em geral diminui se o resíduo aumenta e que este, bem como o parâmetro de amortecimento máximo, aumentam se o

resíduo diminuir para melhorar a eficiência do esquema de processo não-linear. Assim, um forte amortecimento, que pode ser necessário apenas no início do processo iterativo, influencia levemente o fator de amortecimento apenas no final do processo.

Resultados Numéricos

Nos experimentos, consideramos o escoamento na cavidade bidimensional com elevados valores para o número de Reynolds, ($1000 \leq Re \leq 20000$). Nossos resultados são comparados com os apresentados em (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005), onde este utiliza uma malha de (600×600) células. Para isto, vamos comparar os perfis de velocidade, para vários valores do número de Reynolds nas linhas centrais, horizontal e vertical, do domínio. Na sequência apresentamos o desempenho da inserção do fator de amortecimento no método iterativo não linear proposto em (JOHN; KNOBLOCH, 2008).

Para o processo não linear, definimos uma tolerância relativa nas iterações de Picard igual a $tol_{nl} = 10^{-3}$ e um número máximo de passos igual a $itmax_{nl} = 1000$. Os sistemas lineares resultantes são resolvidos pelo método GMRES com 45 vetores na base, e tolerância igual a 10^{-12} com preconditionador de fatoração incompleta (ILU 10). O domínio é discretizado considerando a malha gerada pelo software Gmsh e os testes foram realizados em uma máquina com processador Intel Core i5-6200U 2.3GHz $\times$ 4 com 8GB de RAM e sistema operacional Ubuntu 16.04.

Escoamento na cavidade bidimensional

O escoamento na cavidade bidimensional tem sido estudado extensivamente e é possível encontrar muitos trabalhos sobre este problema na literatura, não só para testar novos métodos de solução das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis estacionários bidimensionais como também para validação quanto à precisão, eficiência numérica, condições de contorno, etc. As Figuras 1 e 2 mostram a descrição do problema e a malha triangular não estruturada com 3721 nós e 7200 elementos usados nos experimentos. O fluxo é impulsionado pela aplicação de uma velocidade tangencial unitária na superfície superior de um domínio quadrado bidimensional, com condições de contorno de Dirichlet em todos os lados. A pressão é prescrita para ser zero no centro da cavidade. Como resultado do lado móvel no topo da cavidade, é desenvolvida uma região de recirculação que apresenta um vórtice primário na região central da cavidade. Dependendo do número de Reynolds, vórtices secundários adicionais podem aparecer nos cantos da cavidade, veja Fig. 3 para $Re = 5000$. Nossos resultados mostram excelente concordância com os experimentos de alta precisão apresentados em (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005), ver Figuras 4 e 5.

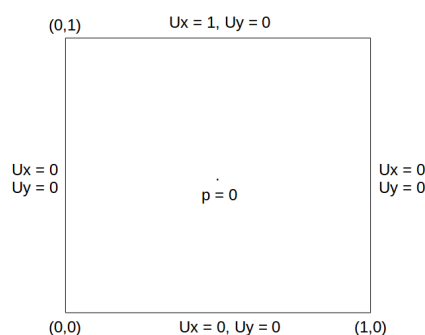


Figura 1: Descrição do Problema.

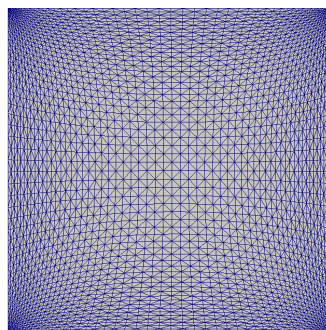


Figura 2: Malha.

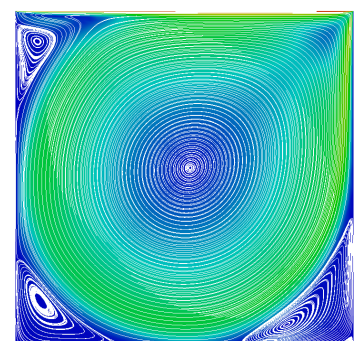


Figura 3: $Re = 5000$.

As Figuras 6-7 mostram os valores do fator de amortecimento, ω em cada iteração não linear. Uma vez que $0.1 \leq \omega \leq 1$, observamos que para $Re=1000$, o fator de amortecimento se manteve constante, $\omega = 1$, ou seja, o método não linear atingiu a convergência sem a necessidade de correção.

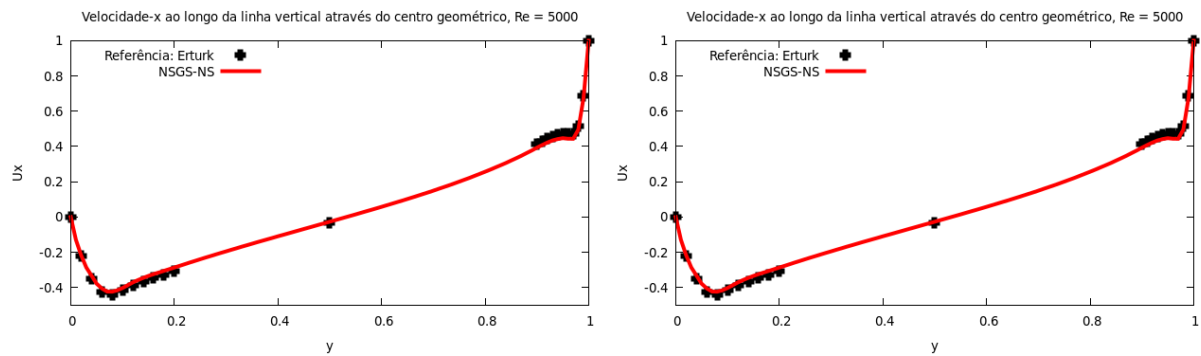


Figura 4: Perfis de velocidades para $Re = 5000$ comparado com a Referência (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005). a) Velocidade x sobre o eixo y b) Velocidade y sobre o eixo x

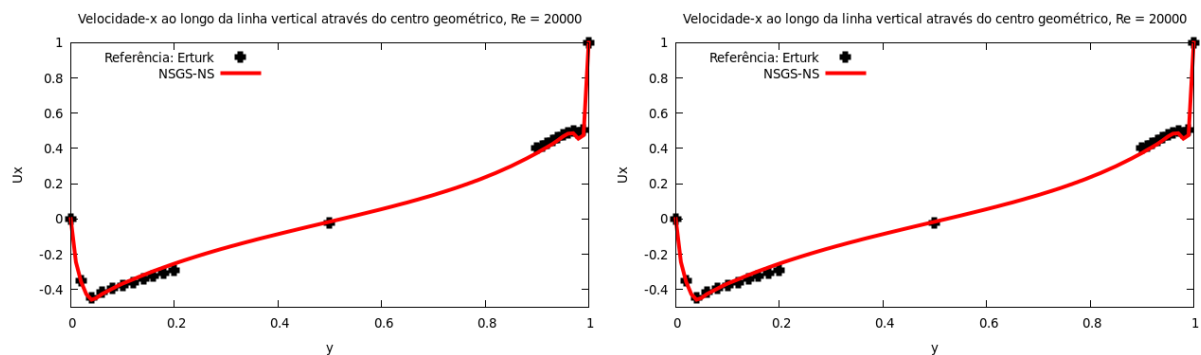


Figura 5: Perfis de velocidades para $Re = 20000$ comparado com a Referência (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005). a) Velocidade x sobre o eixo y b) Velocidade y sobre o eixo x

Para $5000 \leq Re \leq 15000$ houve variações no valor de ω e após uma correção para baixo, ω tende a aumentar de valor até atingir $\omega_{max} = 1$ ou até sofrer uma nova redução, como nos casos onde $Re \geq 15000$, ver Fig. 7. Para $Re = 20000$ o fator de amortecimento atinge o valor mínimo, $\omega_{min} = 0,1$ e permanece com este valor durante algumas iterações não lineares até voltar a aumentar de valor. Este é o caso onde $\omega = \omega_{min}$ e $r^{k+1} > r^k$, linha 11 do algoritmo, de forma que passamos a incrementar pouco a solução até que o resíduo volte a decrescer e consequentemente ω passa a aumentar de valor.

A Tabela 1 mostra o desempenho computacional do método NSGS-NS com e sem a estratégia de correção no fator de amortecimento do método iterativo não linear. Para $Re = 1000$ atingimos a convergência com o mesmo custo computacional com ou sem o fator de amortecimento, uma vez que não há correção neste, ver Fig 6a. Para $Re = 5000$ o fator de amortecimento otimizou em mais de 50% o custo computacional, como podemos observar nas quantidades de iterações lineares (#IL), não lineares (#INL) e tempo de processamento. Para valores de $Re > 5000$ o uso do fator de correção foi crucial para a convergência do processo não linear, onde sem o uso deste o processo atingiu o número máximo de iterações não lineares sem atingir a tolerância desejada (+).

Conclusão

Apresentamos um método de elementos finitos multiescala variacional para resolver as equações de Navier-Stokes incompressíveis, denominado método NSGS-NS. A metodologia conduz a um esquema não-linear, que é resolvido pelo método de Picard apenas na macro escala. Através do problema do escoamento na cavidade bidimensional, ilustramos a robustez do método NSGS-NS mostrando seu comportamento com elementos triangulares lineares por partes enriquecidos por bolhas sobre malhas não

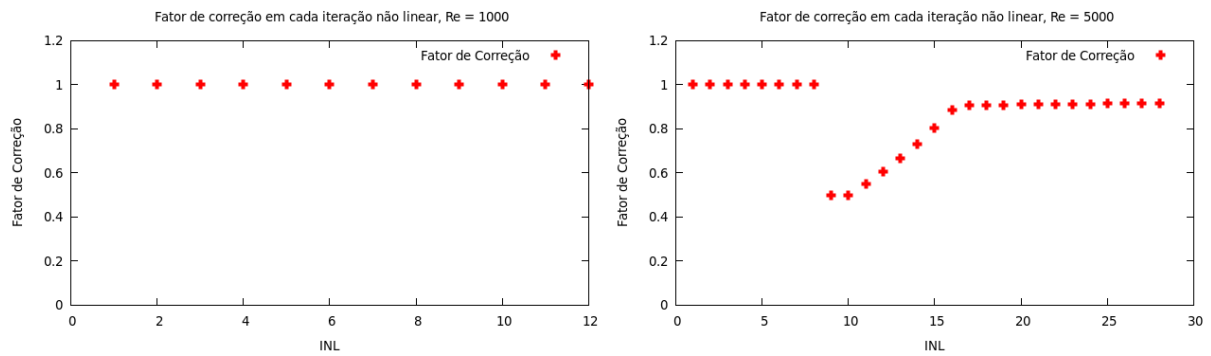


Figura 6: Fator correção a) Re = 1000 b) Re = 5000

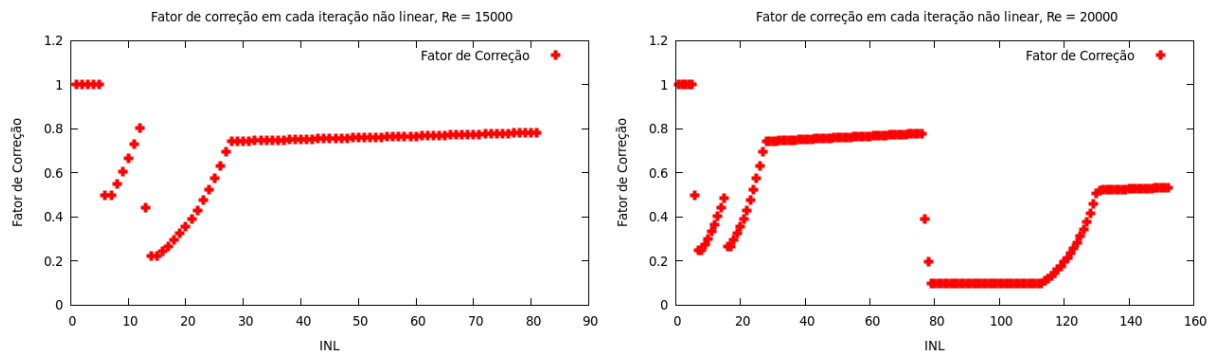


Figura 7: Fator correção a) Re = 15000 b) Re = 20000

Tabela 1: Desempenho computacional usando o fator de correção.

Sem fator de correção				Com fator de correção		
Re	#IL	#INL	Tempo(s)	#IL	#INL	Tempo(s)
1000	12	441	3.6	12	441	3.6
5000	2241	73	18.6	908	28	7.4
7500	+	+	+	1244	40	9.8
10000	+	+	+	2097	56	16.8
15000	+	+	+	2425	81	19.1
20000	+	+	+	4579	152	35.4

estruturadas. Com a técnica de amortecimento do fator de correção da solução a cada iteração não linear, conseguimos aplicar o método NSGS-NS em problemas com elevados números de Reynolds antes não tratáveis.

Referências

BAPTISTA, R. et al. A multiscale finite element formulation for the incompressible navier-stokes equations. In: SPRINGER. *International Conference on Computational Science and Its Applications*. [S.l.], 2018. p. 253–267.

BENTO, S. S. et al. A nonlinear multiscale viscosity method to solve compressible flow problems. In: *Computational Science and Its Applications - ICCSA 2016 - 16th International Conference*,

Beijing, China, July 4-7, 2016, *Proceedings, Part I*. [s.n.], 2016. p. 3–17. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-42085-1_1.

BRENNER, S. C.; SCOTT, L. R. *The mathematical theory of finite element methods*. New York, Berlin, Paris: Springer, 2002. (Texts in applied mathematics).

BREZZI, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, Dunod, v. 8, n. R2, p. 129–151, 1974. Disponível em: <http://eudml.org/doc/193255>.

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. R. Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.*, v. 32, p. 199–259, 1982.

ERTURK, E.; CORKE, T. C.; GÖKÇÖL, C. Numerical solutions of 2-d steady incompressible driven cavity flow at high reynolds numbers. *International journal for Numerical Methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 48, n. 7, p. 747–774, 2005.

HUGHES, T.; TEZDUYAR, T. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 45, p. 217–284, 1984.

HUGHES, T. J. et al. The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 166, n. 1-2, p. 3–24, 1998.

HUGHES, T. J. R. Multiscale phenomena: Green’s functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 127, n. 1-4, p. 387–401, 1995. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(95\)00844-9](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(95)00844-9).

JOHN, V.; KNOBLOCH, P. On spurious oscillations at layers diminishing (sold) methods for convection–diffusion equations: Part ii—analysis for p1 and q1 finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 197, n. 21-24, p. 1997–2014, 2008.

MASUD, A.; KHURRAM, R. A multiscale finite element method for the incompressible Navier–Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 195, n. 13-16, p. 1750–1777, 2006.

SANTOS, I. P.; ALMEIDA, R. C. A nonlinear subgrid method for advection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, p. 4771–4778, 2007. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2007.06.009>.

SANTOS, I. P.; ALMEIDA, R. C.; MALTA, S. M. C. Numerical analysis of the nonlinear subgrid scale method. *Computational & Applied Mathematics*, SciELO Brasil, v. 31, n. 3, p. 473–503, 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S1807-03022012000300003>.

TEZDUYAR, T. E. Adaptive determination of the finite element stabilization parameters. In: *Proceedings of the ECCOMAS computational fluid dynamics conference*. [S.l.: s.n.], 2001.

VALLI, A. M. et al. A parameter-free dynamic diffusion method for advection-diffusion-reaction problems. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 75, n. 1, p. 307–321, 2018. ISSN 0898-1221. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122117305680>.

Um estudo numérico do método da Bisseção Ponderado e Adaptativo para encontrar raízes de equações não lineares

Paula Silva Gonçalves

Curso de Licenciatura em Matemática - UFES, São Mateus, ES
paula.s.g@hotmail.com

Isaac P. Santos

Departamento de Matemática Aplicada - UFES, São Mateus, ES
isaac.santos@ufes.br

Resumo: Neste trabalho apresentamos um estudo numérico do método da Bisseção Ponderado e Adaptativo (BPA) proposto por Dauhoo and Soobhug (2003) para determinar raízes de equações não lineares. Comparamos a performance desse método com os seguintes métodos clássicos: Bisseção, Secante e Newton-Raphson, em termos de números de iteração, para encontrar uma raiz das funções $f_1(x) = x - \cos x$, $f_2(x) = e^{-x} - x$ e $f_3(x) = e^x - 1$. Os resultados numéricos mostram que esse método é competitivo em relação ao método de Newton-Raphson.

Palavras-chave: Raízes de equações. Zeros de funções. Método da Bisseção. Método de Newton-Raphson. Método da Secante.

1 Introdução

O problema de encontrar soluções de equações do tipo $f(x) = 0$ possui aplicação em diversas áreas, como matemática, física, química, engenharia, etc. Como não existem métodos algébricos que determinam a solução do problema no caso geral, devemos então recorrer aos métodos numéricos para obter tais soluções. Os valores de α tais que $f(\alpha) = 0$ são denominados de zero da função f , ou raiz da equação $f(x) = 0$. Antes da utilização dos computadores digitais, a determinação das raízes de equações algébricas e transcendentais era um problema bastante complicado, apesar de existirem alguns métodos diretos, como no caso da equação polinomial de segundo grau. Observamos que mesmo para uma função aparentemente simples como $f(x) = e^{-x} - x$, não se pode obter sua raiz de forma analítica, evidenciando a importância dos métodos iterativos que fornecem soluções aproximadas. Um método simples para obter uma estimativa da raiz da equação $f(x) = 0$ é esboçar um gráfico da função e observar onde ela corta o eixo das abscissas. Esse ponto, que representa o valor de x para o qual $f(x) = 0$, fornece uma aproximação grosseira da raiz. Uma abordagem alternativa é usar o processo de tentativa e erro que consiste em inferir valores para x , de forma a obter $f(x)$ próximo de zero. Essas técnicas tão casuais são obviamente ineficientes e inadequados para as aplicações no mundo real. A combinação de métodos numéricos (descrito por algoritmos eficientes) com a computação torna a solução da maioria dos problemas de raízes de equações uma tarefa simples e eficiente.

Considere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e não linear definida no intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e suponhamos que exista uma única raiz de f em (a, b) . Apresentamos então um estudo numérico do método da Bisseção Ponderado e Adaptativo (BPA) (*Adaptive Weighted Bisection Method - AWBM*) proposto por Dauhoo and Soobhug (2003), comparando sua performance computacional com os métodos da Bisseção, da Secante e de Newton-Raphson, em termos de números de iteração, para encontrar a raiz das funções $f_1(x) = x - \cos x$, $f_2(x) = e^{-x} - x$ e $f_3(x) = e^x - 1$.

2 Métodos Numéricos

Nesta seção apresentamos os métodos da Bisseção, Bisseção Ponderado e Adaptativo, Newton-Raphson e Secante para determinar a solução aproximada da equação $f(x) = 0$, onde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

é uma função contínua definida no intervalo fechado e limitado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, contendo uma única raiz de $f(x) = 0$. Esses métodos são processos iterativos que produzem sequências de números reais que, sob certas hipóteses convenientes, convergem para a solução do problema.

2.1 Método da Bisseção

O método da bisseção é baseado no teorema 2.1, descrito a seguir.

Teorema 2.1 (Teorema de Bolzano) *Dada uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(a)f(b) < 0$, então existe $\alpha \in (a, b)$ tal que*

$$f(\alpha) = 0.$$

O método da bisseção consiste, simplesmente, em subdividir os intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ ao meio a cada iteração e manter o subintervalo que contenha a raiz (de acordo com o Teorema 2.1), ou seja, aquele em que f possui sinais opostos nos extremos. Neste caso, a sequência (x_n) obtida pelo método é descrita por

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

O próximo Teorema, demonstrado em Ruggiero e Lopes (2013, p.45), garante a convergência da sequência numérica gerada pelo método da Bisseção.

Teorema 2.2 *Suponha que $f \in C[a, b]$ (isto é, f é uma função contínua em $[a, b]$) e $f(a)f(b) < 0$. O método da bisseção gera uma sequência de intervalos encaixantes*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

tais que os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existem e são iguais ao zero de f em (a, b) . Além disso, se $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ com $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, então

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{b - a}{2^n}, \quad \text{para } n \geq 1. \quad (2)$$

A taxa de convergência do método da Bisseção é linear, como mostrado em Gautshi (2012, p. 262). Em cada passo do processo iterativo, a avaliação $f(x_n) = 0$ é substituída por um processo de parada.

O método da bisseção é um dos poucos métodos nos quais é possível determinar *a priori* o número de iterações necessárias para calcular a raiz com uma tolerância $\varepsilon > 0$ dada, a partir de um intervalo $[a, b]$. Para isso, basta verificar que se

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^n} < \varepsilon,$$

então o número n de iterações satisfaz

$$n > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}. \quad (3)$$

2.2 Método da Bisseção Ponderado e Adaptativo

É conhecido que o método da bisseção é lento devido sua taxa de convergência ser linear. Dessa forma, Dauhoo e Soobhug (2003) modificaram esse método com o objetivo de acelerar sua convergência. Observe que a sequência (1) do método da Bisseção pode ser escrita como

$$x_n = \frac{1}{2}a_n + \left(1 - \frac{1}{2}\right)b_n. \quad (4)$$

Para particionar os subintervalos em tamanhos diferentes, introduzimos um parâmetro (peso), ω , obtendo

$$x_n = \omega a_n + (1 - \omega)b_n, \quad \omega = [0, 1]. \quad (5)$$

Quando $\omega = 0$, tem-se $x_n = b_n$ e quando $\omega = 1$, tem-se $x_n = a_n$. Usando o algoritmo do método da Bissecção clássico com (5), o número de iterações para obter o zero de f vai depender do valor do peso ω (que pode ser fixo ou variável). O método da BPA utiliza esse procedimento com ω variável durante o processo iterativo. Em cada iteração é determinado um valor ótimo para ω . O método é baseado no próximo teorema, demonstrado em Dauhoo e Soobhug (2003).

Teorema 2.3 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e duas vezes diferenciável em $[a, b]$, tal que $f(a)f(b) < 0$. Suponha também que a única raiz α de f em (a, b) satisfaz $f''(\alpha) \neq 0$. Além disso, definimos a seguinte sequência*

(i)

$$x_n = b_n + \omega_n(a_n - b_n),$$

onde

$$\omega_n = \begin{cases} \lambda_n = \frac{-f(b_n)}{(a_n - b_n)f'(b_n)}, & \text{se } \lambda_n \in (0, 1); \\ \frac{1}{2}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

se $f'(x)$ e $f''(x)$ tiverem o mesmo sinal para todo $x \in [a, b]$ e

(ii)

$$x_n = b_n + \omega_n(b_n - a_n),$$

onde

$$\omega_n = \begin{cases} \lambda_n = \frac{-f(a_n)}{(b_n - a_n)f'(a_n)}, & \text{se } \lambda_n \in (0, 1); \\ \frac{1}{2}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

se $f'(x)$ e $f''(x)$ tiverem sinais diferentes em $[a, b]$.

Então, a sequência x_n converge para a raiz α de f .

O algoritmo do método BPA é descrito no Algoritmo 1.

Algoritmo 1 Método da Bisseção Ponderado Adaptativo (BPA).

Entrada: valores a e b , tolerância ε , número máximo de iterações N_{max} e função f .

Saída: raiz aproximada α_n .

```

se  $f(a)f(b) \geq 0$  então
    pare;
fim se
 $n \leftarrow 0$ ;
 $a_n \leftarrow a$ ;  $b_n \leftarrow b$ ;
enquanto  $((|f(x_n)| \geq \varepsilon) \text{ e } (n \leq N_{max}))$  faça
    se  $f'(b_n)$  e  $f''(b_n)$  têm o mesmo sinal então
         $\lambda_n = \frac{-f(b_n)}{(a_n - b_n)f'(b_n)}$ 
        se  $0 < \lambda_n < 1$  então
             $\omega_n \leftarrow \lambda_n$ ;
        senão
             $\omega_n \leftarrow \frac{1}{2}$ ;
        fim se
         $x_n \leftarrow b_n + \omega_n(a_n - b_n)$ ;
    senão
         $\lambda_n = \frac{-f(a_n)}{(b_n - a_n)f'(a_n)}$ ;
        se  $0 < \lambda_n < 1$  então
             $\omega_n \leftarrow \lambda_n$ ;
        senão
             $\omega_n \leftarrow \frac{1}{2}$ ;
        fim se
         $x_n \leftarrow b_n + \omega_n(b_n - a_n)$ ;
    fim se
    se  $|f(x_n)| \geq \varepsilon$  então
        se  $f(a_n)f(x_n) < 0$  então
             $b_n \leftarrow x_n$ ;
        senão
             $a_n \leftarrow x_n$ ;
        fim se
         $n \leftarrow n + 1$ ;
    fim se
fim enquanto
 $\alpha_n \leftarrow x_n$ 

```

2.3 Método de Newton-Rapshon

O método de Newton-Rapshon, devido a Isaac Newton (1642 - 1727) e a Joseph Raphson (1648 - 1715), é um dos métodos mais conhecidos e mais eficientes na determinação de aproximações numéricas de raízes de equações não lineares (BURDENS; FAIRES, 2008).

Considere a equação de iteração,

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad (6)$$

onde Δx_n é um número real positivo suficientemente pequeno. Supondo f suficientemente derivável em relação a x e fazendo uma expansão em série de Taylor da função f em torno de x_n , obtemos

$$f(x_n + \Delta_n) = f(x_n) + \Delta x_n f'(x_n) + \Delta x_n^2 \frac{f''(\lambda)}{2!},$$

onde $x_n < \lambda < x_{n+1}$. Fazendo $f(x_{n+1}) = f(x_n + \Delta x_n) = 0$ na expressão anterior, obtemos

$$\Delta x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{\Delta x_n^2 f''(\lambda)}{2f'(x_n)}.$$

Substituindo essa última equação em (6) e desprezando os termos de ordem $\mathcal{O}(\Delta x_n^2)$, obtemos o método de Newton-Rapshon dado pela equação

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (7)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$. Vale ressaltar que a condição inicial x_0 dever ser dada.

Uma característica importante do método de Newton é sua convergência quadrática (SULI e MAYERS, 2003; RUGGIERO e LOPES, 2013). O estudo de convergência do método de Newton é baseado no Teorema 2.4 (RUGGIERO; LOPES, 2013, p.69).

Teorema 2.4 *Sejam $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ funções contínuas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contém a raiz $x = \alpha$ de $f(x) = 0$. Suponha que $f'(\alpha) \neq 0$. Então existe um intervalo $\bar{I} \subset I$, contendo a raiz α tal que, se $x_0 \in \bar{I}$, a sequência (x_n) gerada pela equação (7) convergirá para a raiz α de $f(x) = 0$.*

Esse teorema garante a convergência do método de Newton se $x_0 \in \bar{I}$. Em geral, o método de Newton converge desde que se escolha x_0 suficientemente próximo da raiz α . O teorema a seguir, apresentado em Demidovich e Maron (1976) e Campos (2001), descreve um procedimento para determinar a condição inicial x_0 , de forma que o método de Newton seja convergente.

Teorema 2.5 *Se $f(a)f(b) < 0$, e $f'(x)$ e $f''(x)$ forem não nulas e preservarem o sinal em $[a, b]$, então partindo-se da condição inicial $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0)f''(x_0) > 0$ é possível construir, pelo método de Newton, uma sequência (x_n) que convirja para a raiz α de $f(x) = 0$.*

O teorema anterior afirma que o valor inicial x_0 deve ser um ponto no qual a função f tenha o mesmo sinal de sua derivada segunda f'' em x_0 .

2.4 Método da Secante

A necessidade de avaliar a derivada de f em cada iteração é uma desvantagem do método de Newton. Infelizmente, em muitas situações a derivada de f não está disponível explicitamente, em outras, ela é obtida com alto custo computacional. Para evitar o problema do cálculo da derivada no método de Newton, aproximamos a derivada $f'(x_n)$ pelo quociente de diferenças

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

onde x_n e x_{n-1} são duas aproximações para a raiz. Substituindo essa expressão no método de Newton, obtemos o método da Secante, descrito por

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Note que este método precisa de duas condições iniciais, x_0 e x_1 . Como o método da secante é uma aproximação do método de Newton, as condições para sua convergência são praticamente as mesmas do método de Newton. Vale ressaltar que o método da secante pode divergir se $f(x_n) \approx f(x_{n-1})$.

A ordem de convergência do método da secante é $p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618$ (SULI; MAYERS, 2003). Isso significa que a velocidade de convergência é mais rápida do que aquela dos métodos de ordem lineares (bissecção e ponto fixo) e mais lenta do que aquela dos métodos de ordem quadrática (método de Newton). Para Suli e Mayers (2003), o método da secante é também devido a Newton. Este método foi encontrado em uma coleção de manuscritos não publicados, chamada *Newton's Waste Book* e escrita por volta de 1665.

3 Experimentos Numéricos

Nessa seção apresentamos os experimentos numéricos realizados. Os métodos foram implementados em Octave (EATON et al., 2017), Versão 4.4.0, e rodados no ambiente Microsoft Windows 10, com processador Intel Core i3 e 4 Gb de memória RAM. O critério de parada utilizado para todos os métodos foi

$$|f(x_k)| < tol,$$

com $tol = 10^{-9}$.

O métodos Newton-Raphson, Secante, Bisseção e BPA foram aplicados para determinar raízes das três funções, cujos gráficos são mostradas na Fig. 1. As funções são $f_1(x) = x - \cos(x)$, que tem uma raiz em $x \approx 0.73908$, $f_2(x) = e^{-x} - x$, que tem uma raiz em $x \approx 0.56714$ e $f_3(x) = e^x - 1$, que tem uma raiz em $x = 0$.

A Tabela 1 mostra os resultados obtidos. Para a função $f_1(x) = x - \cos(x)$ usamos como condição inicial do método de Newton-Raphson, $x_0 = 0.4$, como condições iniciais do método da Secante, $x_0 = 0.4, x_1 = 0.5$ e como intervalo inicial dos métodos da Bisseção e BPA, $[0, 1]$. Os números de iterações dos métodos de Newton-Raphson, Secante, Bisseção e BPA foram 4, 5, 30 e 3, respectivamente. Na função $f_2(x) = e^{-x} - x$ usamos como condição inicial do método de Newton-Raphson, $x_0 = 0.3$, como condições iniciais do método da Secante, $x_0 = 0.3, x_1 = 0.4$ e como intervalo inicial dos métodos da Bisseção e BPA, $[0, 1]$. Os números de iterações dos métodos de Newton-Raphson, Secante, Bisseção e BPA foram 3, 4, 30 e 4, respectivamente. Para a terceira função, usando duas condições iniciais para o método de Newton-Raphson, $x_0 = 5.0$ e $x_0 = -5.0$, o método convergiu para a raiz em 9 e 148 iterações, respectivamente. Usando $x_0 = 5.0, x_1 = 4.0$ o método da Secante convergiu em 12 iterações, mas para $x_0 = -4.0, x_1 = -3.0$ o método da Secante não convergiu até um limite máximo de 1000 iterações (devido $f(x_n) \approx f(x_{n-1})$ para $x < -2$). Usando como intervalo inicial, $[-1, 5]$, os métodos da Bisseção e BPA realizaram 31 e 9 iterações, respectivamente, para convergir, enquanto que, usando como intervalo inicial, $[-0.5, 10]$, esses mesmos métodos convergiram em 30 e 14 iterações, respectivamente. Neste exemplo, fica claro a superioridade do método BPA em relação aos outros métodos.

Funções	Newton-Raphson		Secante			Bisseção		BPA	
	x_0	Niter	x_0	x_1	Niter	$[a, b]$	Niter	$[a, b]$	Niter
$f_1(x)$	0.4	4	0.4	0.5	5	$[0, 1]$	30	$[0, 1]$	3
$f_2(x)$	0.3	3	0.3	0.4	4	$[0, 1]$	30	$[0, 1]$	4
$f_3(x)$	5.0	9	5.0	4.0	12	$[-1, 5]$	31	$[-1, 5]$	9
$f_3(x)$	-5.0	148	-4.0	-3.0	-	$[-0.5, 10]$	30	$[-0.5, 10]$	14

Tabela 1: Comparação entre os métodos em relação ao número de iterações (Niter) - $tol = 10^{-9}$.

4 Conclusões

Neste trabalho apresentamos um estudo numérico do método da Bisseção Ponderado e Adaptativo, comparando sua performance em termos de número de iterações, com os métodos Newton-Raphson, Secante e Bisseção. Os resultados apresentados na Tabela 1 mostram que o método da Bisseção Ponderado e Adaptativo é competitivo em relação ao método de Newton-Raphson, inclusive obtendo os melhores resultados em relação à função $f_3(x) = e^x - 1$. Em Dauhoo e Soobhug (2003), os autores afirmam, sem demonstração matemática, que a ordem de convergência do método BPA é quadrática. Uma desvantagem desse método é a necessidade de avaliar as primeira e segunda derivadas da função em cada iteração. Mais experimentos computacionais devem ser realizados para conhecer melhor as propriedades numéricas do método.

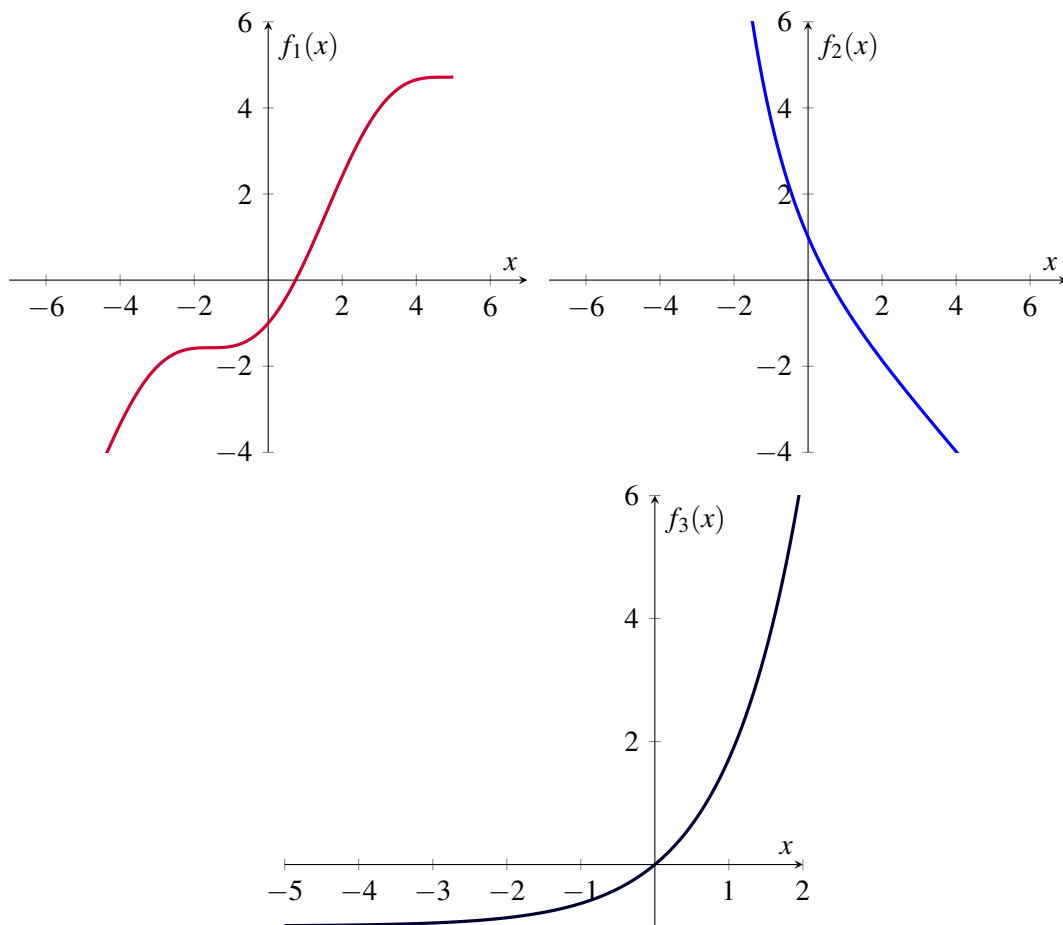


Figura 1: Gráficos das funções $f_1(x) = x - \cos(x)$, $f_2(x) = e^{-x} - x$ e $f_3(x) = e^x - 1$.

5 Referências

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. Cengage Learning, 2008.

CAMPOS, F. F. **Algoritmos Numéricos**. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

DEMIDOVICH, B. P.; MARON, I. A. **Computational Mathematics**. 1.ed. Moscou: Mir Pub., 1976.

GAUTSCHI, W. **Numerical Analysis**. 2.ed. New York: Birkhauser Verlag, 2012.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2.ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

SULI, E.; MAYERS, D. **An introduction to numerical analysis**. 1.ed. New York: Cambridge University press, 2003.

DAUHOO, M. Z.; SOOBHUG, M. An adaptive weighted bisection method for finding roots of nonlinear equations. **International Journal of Computer Mathematics**, v. 80, n. 7, p. 897-906, 2003.

EATON, J. W. et al. GNU Octave: A high-level interactive language for numerical computations. Edition 4. USA, 2017. Disponível em: <http://www.fretechbooks.com/gnu-octave-a-high-level-interactive-language-for-numerical-computations-t425.html>. Acesso em: 10 set. 2018.

Os métodos NSGA II e de programação por metas ponderadas aplicados ao problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental.

Matheus Murback Angelo

*Departamento de Engenharia Elétrica-FEB-UNESP-Bauru-SP
matheus.unespbauru@gmail.com*

Antonio Roberto Balbo

*Faculdade de Ciências-UNESP-Bauru-SP
agntonio.balbo@unesp.br*

Ricardo Bento Nogueira Mori Pinheiro

*Departamento de Engenharia Elétrica-FEB-UNESP-Bauru-SP
ribenopi@hotmail.com*

Resumo: Neste trabalho é apresentada uma técnica de otimização *Goal Programming* e o algoritmo meta-heurístico *Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II) com o intuito de resolver e comparar os resultados obtidos sobre o problema multiobjetivo de Despacho Econômico e Ambiental, com o efeito de pontos de carregamento de válvula (PMDEA-PV), da área de geração de energia. Neste, propomos uma nova abordagem para a resolução do PMDEA-PV baseada na técnica *Weighted Goal Programming* (WCP), que explora a métrica de Chebyshev (norma-LP) para a minimização de variáveis de desvios, definidas para as metas estabelecidas relativas à função objetivo de custos (PDE) e a função de emissão de poluentes (PDA). Resolvemos o PMDEA-PV a partir de um conjunto de subproblemas mono-objetivo definidos pela técnica WCP citada, através do método de pontos interiores implementado no pacote de otimização *fmincon* do software MATLAB e também resolvemos o PMDEA-PV pelo método NSGA-II, afim de comparar resultados. Ambas as técnicas de resolução são implementadas no software MATLAB R2018b.

Palavras-chave: Otimização Não-Linear. Despacho Econômico e Ambiental. *Goal Programming*. NSGA-II. Sistemas Elétricos de Potência.

1) Introdução

Os problemas de Despacho Econômico com ponto de válvula (PDE-PV) e Despacho Ambiental (PDA) são problemas restritos e não-lineares inseridos na área de sistemas elétricos de potência. Estes problemas são formulados a fim de minimizar uma função não-linear, não convexa e não diferenciável relativa à função custo para o PDE ou quadrática e convexa relativa à função de emissão para o PDA. Estes problemas podem ser combinados em um único problema multiobjetivo chamado problema multiobjetivo de Despacho Econômico e Ambiental (PMDEA-PV).

As funções objetivos do PDE-PV e do PDA são conflitantes, isto é, quando é minimizada a função custo para o PDA o valor da função emissão do PDA aumenta e vice-versa. Podemos reformular o PMDEA-PV equivalentemente por meio de técnicas como ϵ -Restrito descrito em Haimes (1971), e soma-ponderada descrito em Miettinen (1999), por exemplo, e assim aplicar um método de resolução determinístico ou heurístico para resolução dos mesmos, mas não o faremos neste trabalho.

As soluções factíveis determinadas pelos algoritmos citados são caracterizadas de duas formas, as dominadas (não eficientes) e as não-dominadas (Eficientes ou Pareto-ótimas). Aplicamos a técnica relacionada ao *Weighted Goal Programming* (Jones e Tamis, 2010), em um conjunto com o método de pontos interiores (Gonçalves, (2015) e o NSGA-II (Deb, 2002, p.182), para determinar as soluções não dominadas e, assim, determinar a curva de solução Pareto-Eficientes.

O *Goal Programming* é uma metodologia para a resolução de problemas multiobjetivo que busca determinar soluções destes problemas estabelecendo metas para as funções objetivo e variáveis de desvios destas metas, as quais são minimizadas na função objetivo do problema visando atender as

metas impostas. Ele modela o problema multiobjetivo em um conjunto de subproblemas mono-objetivos, os quais podem ser resolvidos por técnicas heurísticas, determinísticas ou híbridas. Neste trabalho utilizamos o WGP em conjunto com um método determinístico de solução, o método de pontos interiores, desenvolvido em Gonçalves (2015), à resolução do PMDEA-PV.

O objetivo deste trabalho é explorar a técnica de Goal Programming para uma nova formulação e resolução do PMDEA-PV, na qual gera um conjunto de subproblemas mono-objetivo, os quais são resolvidos pelo pacote de otimização *fmincon*. O PMDEA-PV também é resolvido pelo algoritmo heurístico NSGA-II, com o intuito de comparação de resultados, para validar a abordagem relacionada ao método *Goal Programming* apresentadas neste trabalho.

2) Os Problemas de Despacho PDE-PV, PDA E PMDEA-PV

O problema de despacho econômico tem como objetivo minimizar o custo total de geração de energia, levando em consideração a potência gerada em cada unidade geradora. Neste caso, objetiva-se minimizar o custo de geração, atender a demanda desejada pelo consumidor, sempre respeitando os limites operacionais de cada unidade geradora do sistema.

No caso de geradores termoelétricos com turbinas a vapor, existem válvulas de admissão de vapor, que quando abertas influenciam na saída da unidade geradora. Esse fenômeno é chamado de efeito de ponto de carregamento de válvula. De acordo com Happ (1997), nestes pontos, teoricamente, não ocorre estrangulamento no sistema, e assim, não há perdas associadas a tais pontos.

A função objetivo (custo) dada em dólar por hora (\$/h) e suas restrições relacionadas ao PDE com pontos de carregamento de válvula são dadas por:

$$\underset{Pg}{\text{Minimizar}} \quad f_e = \sum_{i \in G} (a_i Pg_i^2 + b_i Pg_i + c_i) + \sum_{i \in G} |e_i \text{sen}(f_i (Pg_i^{\text{Min}} - Pg_i))| \quad (1)$$

$$s.a \quad \sum_{i \in G} Pg_i = Pd \quad (2)$$

$$Pg_i^{\text{Min}} \leq Pg_i \leq Pg_i^{\text{Max}} \quad (3)$$

Onde:

f_e : Representa a função de custos de utilização de combustíveis fósseis do PDE;

a_i, b_i, c_i, e_i e f_i : Representam os coeficientes de custos de cada unidade geradora i ;

Pg_i : Representa a potência gerada em cada unidade geradora i ;

Pd : Representa a potência demandada pelo consumidor;

$Pg_i^{\text{Min}}, Pg_i^{\text{Max}}$: Representa os limites mínimos e máximos, respectivamente, de geração de cada unidade geradora;

G : Representa o conjunto das unidades geradoras do sistema.

Durante um bom tempo a geração termoelétrica de energia considerou apenas a minimização de custos sem olhar para o impacto ambiental causado pela emissão de gases oriundos da queima de combustíveis fósseis, o que contribuía para a elevação da poluição atmosférica. Cada quilowatt produzido esta associado a uma taxa de emissão, que é obtida pela relação emissão de poluente/energia produzida ou combustível consumido, expresso em Kg por unidade de energia.

A modelagem da função emissão do PDA, considera a relação entre a quantidade de cada poluente e a saída de potência de cada unidade, ou seja, o modelo o PDA depende, entre outras coisas, do tipo de emissão. O modelo de otimização relacionado ao PDA é dado por:

$$\underset{Pg}{\text{Minimizar}} \quad f_a = \sum_{i \in G} A_i Pg_i^2 + B_i Pg_i + C_i \quad (4)$$

Sujeito às restrições (2) e (3) vistas na seção 2.1

Onde:

f_a : Representa a função de emissão de poluentes do PDA;

A_i, B_i e C_i : Representam os coeficientes de emissão de cada unidade geradora i ;

2.1) Problema multiobjetivo de Despacho Econômico e Ambiental (PMDEA-PV)

O PMDEA-PV é definido como:

$$\begin{aligned} & \underset{Pg}{\text{Minimizar}} && \{f_e, f_a\} && (5) \\ & \text{s.a} && \sum_{i \in G} Pg_i = Pd \\ & && Pg_i^{Min} \leq Pg_i \leq Pg_i^{Max} \end{aligned}$$

As funções componentes f_e e f_a do PMDEA-PV são conflitantes (custos e emissões) como já citado neste trabalho, isso torna impossível a determinação de uma única solução ótima ao problema, denominada de solução utópica na literatura, a qual minimiza simultaneamente as funções objetivo citadas. Assim é possível encontrar, apenas, soluções Pareto-Eficientes que satisfaçam as restrições do problema, isto é, soluções viáveis que sejam boas em relação a todos os objetivos e estritamente melhor em relação a pelo menos um objetivo. Existem várias maneiras de combinar essas componentes em uma única função objetivo para que possamos aplicar um algoritmo de otimização e obter as soluções Pareto-Eficientes. Na literatura, para exemplificar, existem dois métodos bem conhecidos para a resolução do PMDEA-PV chamados de soma-pondera e ϵ -Restrito que podem ser vistos mais detalhadamente em Miettinen (1999) e Haimes (1971), respectivamente.

3) Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II)

O NSGA-II é um algoritmo usado para resolver problemas multiobjetivo. Este é baseado em algoritmos genéticos que apresentam um conceito de dominância, ou seja, classifica a população total em fronteiras de acordo com o grau de dominância de cada indivíduo.

No NSGA-II, os indivíduos que estão localizados na primeira fronteira são considerados as melhores soluções daquela geração, enquanto que na última fronteira encontram-se os piores, ou seja usa um conceito elitista, o que permite ao algoritmo uma priorização dos indivíduos melhores classificados.

O funcionamento do NSGA II se destaca por possuir dois mecanismos importantes no processo de seleção, no caso o Fast Non-Dominated Sorting e o Crowding Distance. Inicialmente uma população é criada de tal forma que irão passar por um processo em que é atribuído a cada indivíduo um grau de dominância em relação a todos os outros indivíduos da população, tal processo é chamado de Fast Non-Dominated Sorting. Isso é obtido comparando uns com os outros e assim classificando-os de acordo com o Critério de Dominância descrito anteriormente.

Após os valores de dominância forem atribuídos a todos da população, esses indivíduos serão em seguida classificados em fronteiras de acordo com os seus valores de dominância. Os melhores indivíduos são classificados na primeira fronteira, em seguida, os indivíduos que restaram são classificados em outras fronteiras até que e os piores são classificados como pertencentes à última fronteira. Essa etapa segue até que não haja mais indivíduos a serem classificados.

Após todos os indivíduos estarem classificados dentro de uma fronteira, operador de diversidade, definido como *crowding distance* os classifica. Esse operador irá ordenar cada indivíduo de acordo com a sua distância em relação aos pontos vizinhos na mesma fronteira. Os vizinhos que estiverem mais distantes tem maior probabilidade de serem selecionados. Esse operador permite que haja um melhor espalhamento dos resultados, evitando-se assim aglomerações de soluções sobre um mesmo ponto.

Desta forma, após os indivíduos serem classificados de acordo com o seu grau de dominância e passarem pelo processo do *crowding distance*, são selecionados os que irão passar pelo processo de

cruzamento, assim gerando uma nova população de indivíduos, e assim o algoritmo se repete até que atinja a quantidade de gerações estipulada na inicialização do algoritmo.

Uma forma mais detalhada sobre a programação do algoritmo, os operadores citados, cruzamento, mutação, vantagens e desvantagens do algoritmo é vista em Deb (2002) e Brownlee (2011).

4) Goal Programming

A filosofia baseada em metas foi formalizada no campo moderno de pesquisa operacional e ciência de gestão pela técnica de *Goal Programming*. A formulação mais antiga de programação por metas foi introduzida por Charnes et al. (1955) no contexto da remuneração dos executivos, onde este foi visto como uma adaptação para a programação linear.

Uma teoria formal sobre *Goal Programming* é dada por Charnes e Cooper (1961). O desenvolvimento ocorreu posteriormente por Ijiri (1965), livros didáticos de Lee (1972) e Ignizio (1976). Estes autores apresentaram técnicas como uma ferramenta para resolução de problemas na área de pesquisa operacional. Isso levou a um grande número de aplicações sendo relatadas na literatura desde meados da década de 1970 em diante, relativas à otimização multiobjetivo.

A técnica *Goal Programming* utiliza as seguintes componentes: variáveis de decisão, as restrições do problema, os desvios positivos e negativos das variáveis de decisão em relação ao que se deseja atingir, ou seja, as metas impostas e a função objetivo do problema.

4.1) Weighted Goal Programming (WCP)

De acordo com Jones e Tamis (2010), o *Weighted Goal Programming* permite uma compensação direta entre as variáveis de desvio, colocando-as em uma função normalizada e ponderada, onde cada peso é associado à uma variável de desvio e estes variam no intervalo de $[0,1]$, tal que a soma de todos os pesos deve resultar em 1.

Desta forma, quanto maior o peso relacionado à uma variável de desvio, mais ela é priorizada no processo de minimização. Tais explicações ficam mais claras no modelo visto em Jones e Tamis (2010). Desta forma, aplicando o *Weighted Goal Programming* em conjunto com a norma L_p ao PMDEA-PV, temos um novo problema de otimização, definido por:

$$\text{Min} \quad \left[\left(\frac{v_1 d_e^+}{f_e^{\text{Min}}} \right)^p + \left(\frac{v_2 d_a^+}{f_a^{\text{Min}}} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (8)$$

$$f_e - d_e^+ = f_e^{\text{Min}} \quad (9)$$

$$f_a - d_a^+ = f_a^{\text{Min}} \quad (10)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i \in G} P g_i = P d$$

$$P g_i^{\text{Min}} \leq P g_i \leq P g_i^{\text{Max}} \\ d_e^+, d_a^+ \geq 0 \quad (11)$$

Onde:

p : Representa um parâmetro positivo que deve ser maior do que 1, levando em consideração que quando fazemos $p = 2$ estamos tratando a função objetivo (8) com a norma Euclidiana e quando fazemos $p \rightarrow \infty$ estamos tratando a função objetivo (8) com a métrica de Chebyshev ;

f_e, f_a : Representa funções custo de despacho econômico e de despacho ambiental, respectivamente;

$f_e^{\text{Min}}, f_a^{\text{Min}}$: Representa os custos mínimos de cada função objetivo;

d_e^+, d_a^+ : Representa os desvios relacionados aos custos e emissões das funções componentes, respectivamente;

v_1, v_2 : Representa os parâmetros de peso relacionados aos desvios dos custos, onde estes são positivos e sua soma deve resultar em 1.

Sendo assim, a minimização deste problema é equivalente a minimização dos problemas (6) e (7) vistos na seção 2.3.

5) Metodologia e Resultados

Os métodos definidos nas seções 3 e 4 foram aplicados ao PMDEA-PV, para um caso-base contendo 6 unidades geradoras, cujos resultados são apresentados nesta seção.

Todos os dados relacionados às unidades geradoras deste problema, usados para a realização dos testes numéricos, podem ser vistos em Gonçalves (2015).

O caso-base de PMDEA-PV de 6 unidades geradoras foram resolvidos para comparação de resultados, obtidos através da formulação vista na seção 4.1, cujo modelo definido de (8) a (11), para o caso-base, foi solucionado pelo *solver fmincon*, enquanto que, o algoritmo NSGA-II foi aplicado ao modelo equivalente definido em (5), cujos resultados foram obtidos afim de constatar que a formulação relacionada ao WGP, na norma L_p , é eficiente para resolver o PMDEA-PV. Os dados do caso-base de 6 unidades geradoras solucionado, bem como, solução inicial e parâmetros utilizados para a execução dos métodos foram extraídos de Gonçalves (2015). Iniciamos o método NSGA-II à resolução do modelo (5) com uma população inicial de 100 indivíduos e estipulamos o número total de iterações/gerações sendo igual a 15. Para o *solver fmincon*, caso o critério de parada do algoritmo de pontos interiores não for satisfeito com um erro menor que 10^{-4} , limitamos o total de iterações em 1000.

Na tabela 1 temos os resultados determinados pelo NSGA-II aplicado ao PMDEA-PV, em que foi possível apresentar somente os valores da funções objetivo do PDE-PV e PDA, relativa às soluções eficientes em potência (kw/h) determinadas por esse, não sendo possível mostra-las neste trabalho. A Figura 1 representa os valores das funções plotados num plano cartesiano tal que o eixo das abscissas representa a função custo relacionada ao PDE e o eixo das ordenadas representa a função emissão relacionada ao PDA, cujo gráfico é denominado de curva *trade-off*, tal que os pontos em azul são os valores obtidos para as soluções eficientes e os pontos em vermelho são as soluções ineficientes, que possibilitaram a construção da curva de valores Pareto-Eficientes ou Pareto-ótimas.

Analogamente, a tabelas 2 representam os resultados determinadas pelo *solver fmincon* aplicado ao PMDEA-PV de 6 unidades gerados, formulado de acordo com o WGP de (8) a (11), onde a Figura 2 representa os mesmos graficamente, tal que os pontos em azul são valores das funções relativos às soluções eficientes, na curva de soluções Pareto-Eficientes. O tempo necessário para a determinação das soluções do PMDEA-PV pelo NSGA-II foi de aproximadamente 33.8 segundos e o tempo que o *solver fmincon* tomou para determinar cada solução do PMDEA-PV foi de aproximadamente 0.7 segundos.

5.1) Resultados Numéricos

Figura 1: Gráfico referente às soluções determinadas pelo NSGA-II aplicado ao PMDEA-PV

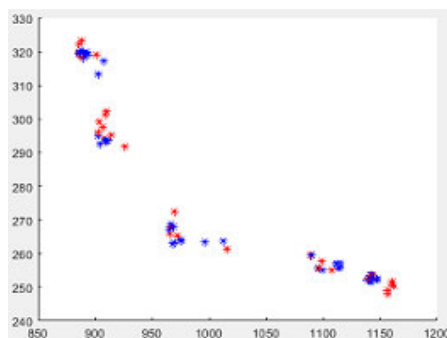


Tabela 1: Soluções determinadas pelo NSGA-II para o PMDEA-PV

NSGA-II	
f_e (\$/h)	f_a (kg/h)
886.24	319.3
903.12	313.3
903.2	294.9
904.3	292.7
968.1	263
996.4	263.6
1099.31	255.2
1114.3	255.6
1141.03	251.8
1142.11	251.6

Figura 2: Gráfico de soluções determinadas pelo solver *fmincon* aplicado ao PMDEA-PV formulado de acordo com o WGP.

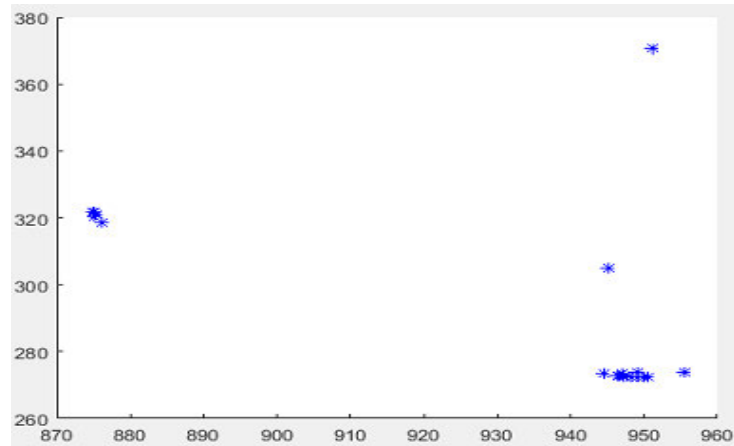


Tabela 2: Soluções determinadas pelo *solver fmincon* aplicado ao PMDEA-PV formulado de acordo com o WGP.

W. Goal Programming - <i>fmincon</i>			W. Goal Programming - <i>fmincon</i>		
(v_1, v_2)	f_e (\$/h)	f_a (kg/h)	(v_1, v_2)	f_e (\$/h)	f_a (kg/h)
(1,0)	955.6	273.8	(0.4,0.6)	951.185	272.549
(0.9,0.1)	946.54	272.85	(0.3,0.7)	874.7921	321.7366
(0.8,0.2)	944.5927	273.6142	(0.2,0.8)	875.2807	320.8839
(0.7,0.3)	947.2647	272.5517	(0.9,0.1)	876.1794	318.6236
(0.6,0.4)	948.3471	272.4826	(0,1)	945.1266	304.9337
(0.5,0.5)	949.866	272.5102			

Como esperado, o WGP determinou soluções melhores/competitivas em relação ao NSGA-II para o PMDEA-PV, como mostram as tabelas 1 e 2 apresentadas. Isso é justificado desde que, o NSGA II trata-se de uma técnica heurística de resolução do problema, que não garante a otimalidade das soluções determinadas, também considerando que o tempo de resolução do NSGA-II é muito maior que o do *solver fmincon*. Enquanto que, a técnica determinística de pontos interiores utilizada pelo *solver fmincon*, aplicada ao mesmo problema garante a otimalidade das soluções determinadas para cada subproblema mono-objetivo solucionado e gerado pelo WGP. Desta forma incentivando o uso desta técnica para resolver problemas mais robustos e difíceis no futuro.

6) Conclusões

Neste trabalho foram apresentadas, a técnica de otimização *Goal Programming* e o algoritmo meta-heurístico *Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II), as quais foram aplicadas à resolução do problema multiobjetivo de Despacho Econômico e Ambiental, com o efeito de pontos de carregamento de válvula (PMDEA-PV). Foi apresentada uma nova abordagem para a resolução do PMDEA-PV baseada na técnica *Weighted Goal Programming* (WCP), que explora a métrica de Chebyshev (norma-LP) para a resolução do PMDEA-PV. Esse foi solucionado para um caso-base de 6 unidades geradoras, a partir de um conjunto de subproblemas mono-objetivo definidos pela técnica WCP, através do método de pontos interiores, implementado no pacote de otimização *fmincon*, bem

como pelo método heurístico NSGA-II, afim de comparar resultados. Ambas as técnicas de resolução foram implementadas no software MATLAB R2018b.

Por se tratar de uma técnica determinística, o WGP associado ao método de pontos interiores determinou soluções Pareto-eficientes melhores/competitivas do que aquelas obtidas pela técnica heurística NSGA II, por garantir a otimalidade na resolução dos subproblemas gerados pelo WGP, enquanto que o método heurístico não garante a otimalidade das soluções determinadas. Através dos resultados obtidos concluímos que, a utilização de uma metodologia determinística que acopla o WGP e os métodos de pontos interiores, pode ser utilizada com sucesso para resolver problemas relativos ao PMDEA-PV, de dimensões maiores, como os casos-base de 19, 40, 57 e 118 geradores, os quais são objetos de continuidade deste trabalho em futuro próximo.

Referências

BROWNLEE, Jason. **Clever algorithms: nature-inspired programming recipes**. Jason Brownlee, 2011.

CHARNES, Abraham; COOPER, William W.; FERGUSON, Robert O. Optimal estimation of executive compensation by linear programming. **Management science**, v. 1, n. 2, p. 138-151, 1955.

CHARNES, Abraham; COOPER, William Wager. **Management models and industrial applications of linear programming**. 1961.

DEB, Kalyanmoy et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. **IEEE transactions on evolutionary computation**, v. 6, n. 2, p. 182-197, 2002.

GONÇALVES, Elis. Métodos híbridos de pontos interiores/exteriores e de aproximantes de funções em problemas multiobjetivo de despacho econômico e ambiental. 2015.

HAIMES, Y. V. On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. **IEEE transactions on systems, man, and cybernetics**, v. 1, n. 3, p. 296-297, 1971.

HAPP, H. H. Optimal power dispatch⁴A comprehensive survey. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. 96, n. 3, p. 841-854, 1977.

IGNIZIO, James P. **Goal programming and extensions**. Lexington Books, 1976.

IJIRI, Yuji. **Management goals and accounting for control**. North Holland Pub. Co., 1965.

JONES, Dylan; TAMIZ, Mehrdad. Practical goal programming. International series in operations research and management science. 2010.

LEE, Sang M. et al. **Goal programming for decision analysis**. Philadelphia: Auerbach Publishers, 1972.

MIETTINEN, Kaisa. Nonlinear Multiobjective Optimization, volume 12 of International Series in Operations Research and Management Science. 1999.

O uso do Software Geogebra nas aulas de matemática correlacionando aos pensamentos de Viygotsky

Brendo Graunke Prates

*Universidade Federal do Espírito Santo/ Centro Universitário Norte do Espírito Santo
brendograunke@hotmail.com*

Patrícia da Cruz Silveiras

*Universidade Federal do Espírito Santo/ Centro Universitário Norte do Espírito Santo
patriciacruzsilveiras@gmail.com*

Resumo: O Uso do Geogebra nas aulas de matemática correlacionando com os pensamentos de Vigotsky. Com isso, justifica-se que ao utilizar o software como ferramenta lúdica e tecnológica para ensinar matemática, estimula o desenvolvimento de habilidades e competências inerentes a esses conteúdos. O presente trabalho foi desenvolvido com alunos do 9º do Ensino Fundamental II, que frequentam as escolas municipais, localizadas em São Mateus – ES. Diante disso, utilizou-se o software Geogebra para motivar o estudo de funções afim e quadrática, tornando mais atrativo o aprendizado, bem como a análise dos gráficos. Evidenciou-se que dos 12 estudantes, 8 ainda não haviam utilizado nenhum programa computacional nas aulas e 4 estudantes já haviam utilizado algum software nas aulas de matemática. Conclui-se que o software Geogebra tornou os conteúdos matemáticos de função afim e quadrática mais significativa para os estudantes, o uso do mesmo tornou as atividades matemática mais dinâmica, deixando as aulas mais interessantes, o que contribuiu para a aprendizagem de conteúdos complexos de forma simples.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Geogebra. Ensino Fundamental II.

Introdução

As Tecnologias Digitais estão cada vez mais presentes na sociedade e com o intuito de fomentar a inserção destas no meio educacional. Com isso, a educação matemática frente às novas tecnologias faz perceber a necessidade de novos métodos de trabalho de ensino-aprendizagem que possam se adequar aos avanços tecnológicos, maximizando o saber sistematizado em sala de aula (SAVIANI, 2005, p.14). Diante do exposto sobre a importância do uso das tecnologias, a Geogebra é um software gratuito, que permite trabalhar a geometria de forma dinâmica com a abordagem de vários conteúdos matemáticos, oferecendo a possibilidade de fazer o seu uso em vários níveis de ensino, pois associa geometria, álgebra, tabela, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema, permitindo realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas como com funções que podem modificar-se dinamicamente depois (GEOGEBRA, 2009). Vale ressaltar que, o programa Geogebra foi arquitetado e desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2001, na University of Salzburg e tem continuado o desenvolvimento na Florida Atlantic University para ser utilizado em educação matemática nas escolas (BORGES e NETO, 2010). Com o exposto acima, sobre o ensino-aprendizagem, e entre outros pontos, é válido correlacionar com os pensamentos de Vygotsky que sempre demonstrou preocupação em estudar o desenvolvimento do ser humano, buscando entender os seus processos de aprendizado e desenvolvimento e sua relação com os aspectos sociais. Dessa forma, sua teoria tem como ponto central, que o desenvolvimento humano ocorre no momento em que a existe a relação de um indivíduo com o outro, ou ainda, é resultante de um processo sócio histórico e cultural à medida que o indivíduo interage com o seu meio (VYGOTSKY, 2007). Diante do exposto, foi proposto na aula de Psicologia da Educação, o trabalho cujo tema selecionado pelo grupo foi: O Uso do Geogebra nas aulas de matemática correlacionando com os pensamentos de Vigotsky. Com isso, justifica-se que ao utilizar o software Geogebra como ferramenta lúdica e tecnológica para

ensinar matemática, estimula o desenvolvimento de habilidades e competências inerentes a esses conteúdos, facilitando a compreensão e favorecendo o aprendizado dos alunos de forma prazerosa.

Metodologia

O presente trabalho foi desenvolvido com alunos do 9º do Ensino Fundamental II, que frequentam as escolas municipais, localizadas em São Mateus – ES. Foi desenvolvida uma prática pedagógica diferenciada para explicação de funções afim e quadrática, que muitas das vezes o uso de métodos tradições não estimula o aluno a aprender o conteúdo passado em sala de aula. Ao se fazer o uso de ferramentas interativas, o professor cria um ambiente que estimula o aluno à apropriação de conhecimento. Diante disso, utilizou-se o software Geogebra para motivar o estudo de funções afim e quadrática, tornando mais atrativo o aprendizado, bem como a análise dos gráficos.

A Tabela 1 descreve atividades realizadas para utilizando o software Geogebra como prática pedagógica.

Tabela 1: Descrição das atividades desenvolvidas

ATIVIDADE	DESCRIÇÃO
01	Conhecendo funções básicas do Geogebra.
02	Criando pontos e retas.
03	Alterando a posição de objetos e apagando objetos.
04	Construindo o gráfico de uma função afim.
05	Construção do gráfico da função quadrática.
06	Análise da concavidade da parábola em função do coeficiente a
08	Raízes ou zero da função quadrática.
09	Função quadrática crescente e decrescente.
10	Função Afim crescente e decrescente.
11	Questionário de avaliação do software Geogebra.

Fonte: O autor (2017)

Para a realização das atividades com o uso do software Geogebra foram utilizados três notebooks e um projetor para orientar os alunos. Em primeiro momento foi apresentado a barra de comandos do software Geogebra como ilustrado na Figura 1.

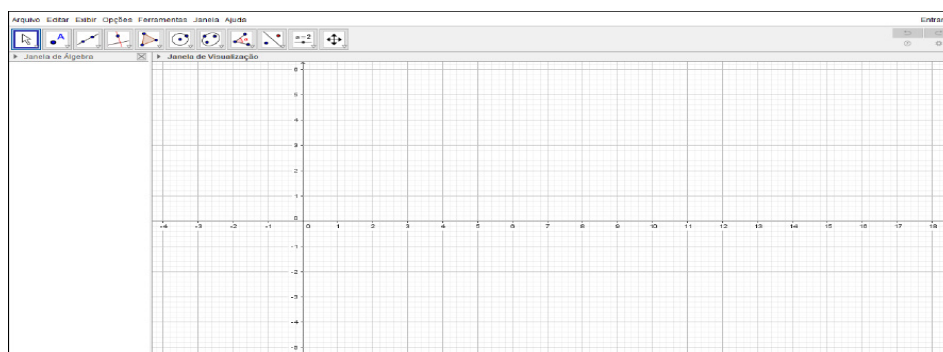


Figura 1: de comandos do Geogebra.

Em seguida foram construídos pontos e retas com o auxílio da ferramenta da janela 2, e puderam explorar as ferramentas de apagar, mover e alterar objetos, como se pode observar na Figura 2.

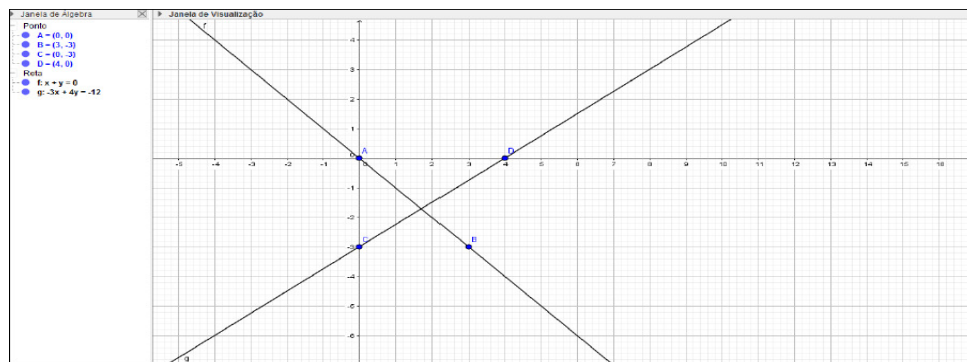


Figura 2 - Figura de uma função afim construída no software Geogebra.

Devido os alunos ainda não ter o devido conhecimento de função quadrática, não foi possível aprofundar no assunto, no entanto, seguindo o roteiro estabelecido, foi desenvolvida uma atividade para encontra raízes da função quadrática e analisar a concavidade da mesma.

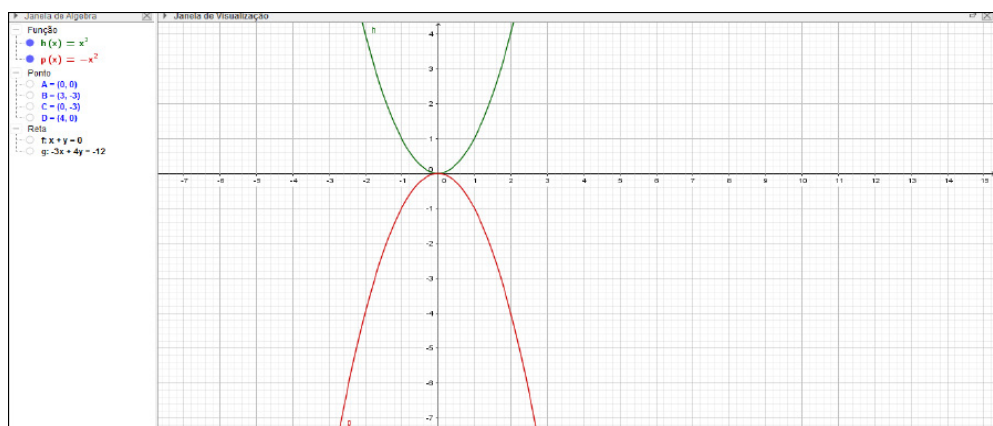


Figura 3 - Figura de uma função quadrática no software Geogebra.

Diante do que foram mencionados em sala de aula, os alunos puderam compreender que: 1 - O gráfico de uma função afim é uma reta;

2 - Ao alterar os coeficientes a função se altera;

3 - Ao se alterar o valor de a (coeficiente angular) a função torna-se crescente ($a > 0$) ou decrescente ($a < 0$);

4 - A curva característica de uma função quadrática é uma parábola;

5 - O valor do coeficiente a determinara a concavidade da parábola, onde ($a > 0$) a concavidade é para cima e ($a < 0$) concavidade para baixo.

Resultados e Discussões

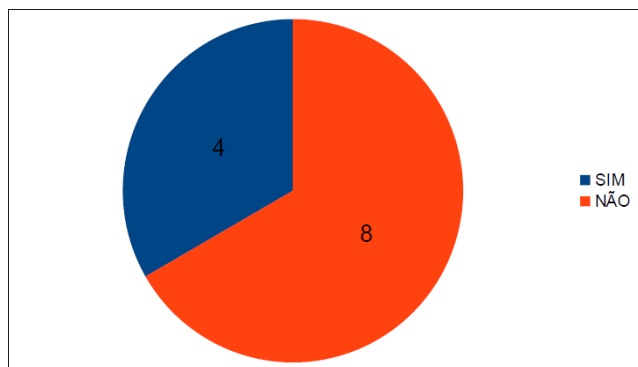
O resultado do questionário utilizado para avaliar o software Geogebra junto aos alunos está demonstrado na tabela 2. Os resultados foram obtidos por meio dos dados recolhidos, tabulados e organizados em gráficos de colunas para melhor identificação das informações expressas.

Tabela 2: Ficha de diagnóstico do uso do software Geogebra

1)Você já utilizou algum <i>software</i> nas suas aulas de matemática?	SIM		NÃO	
2)Você conhecia o <i>software</i> GeoGebra?	MUITO	MÉDIO	POUCO	NADA
3)Você teve dificuldades no uso do software GeoGebra?	MUITO	MÉDIO	POUCO	NADA
4)O uso do <i>software</i> GeoGebra estimulou o estudo de funções afim e quadrática?	MUITO	MÉDIO	POUCO	NADA
5)O uso do <i>software</i> GeoGebra tornou o estudo de funções afim e quadrática mais atraente?	MUITO	MÉDIO	POUCO	NADA
6)O uso do <i>software</i> GeoGebra facilitou a construção de gráficos de funções afim e quadrática?	MUITO	MÉDIO	POUCO	NADA
7)O uso do software GeoGebra facilitou a aprendizagem dos conteúdos de funções afim e quadrática?	MUITO	MÉDIO	POUCO	NADA
8)Você considera o uso do <i>software</i> GeoGebra importante como ferramenta de ensino da matemática?	MUITO	MÉDIO	POUCO	NADA
9) O que de mais interessante você achou do <i>software</i> GeoGebra?				
10)Deixe sua opinião e sugestão sobre a utilização do <i>software</i> GeoGebra na sala de aula.				

Fonte: O autor (2017).

Gráfico 01: Você já utilizou algum software nas suas aulas de matemática



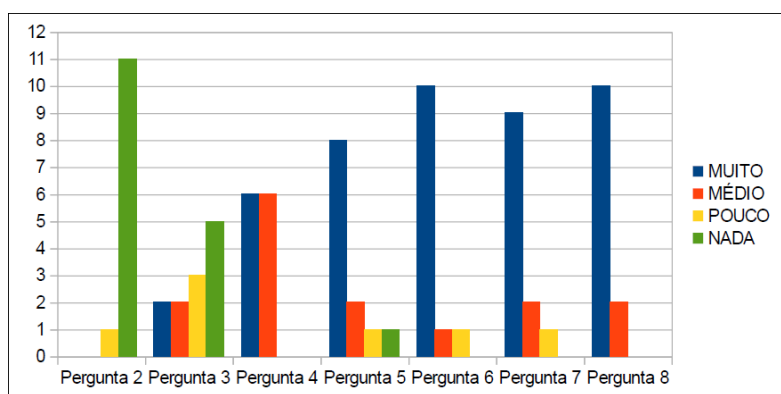
Fonte: O autor (2017).

De acordo com o gráfico 1, sobre a utilização de algum software nas aulas de matemáticas, evidenciou-se que dos 12 estudantes, 8 ainda não haviam utilizado nenhum programa computacional nas aulas e 4 estudantes já haviam utilizado algum software nas aulas de matemática. De acordo com o autor Borba e Penteadó (2003, p.17), o acesso à informática na educação deve ser visto não apenas como um direito, mas como elemento de um projeto coletivo que prevê a democratização de promover as tecnologias desenvolvidas por essa mesma sociedade. São dessas ambas as formas que a informática na educação deve ser relevada: alfabetização tecnológica e direito ao acesso. Segundo os

termos de Piaget, o conhecimento é fruto da interação constante entre a bagagem hereditária e as experiências adquiridas.

De acordo com o gráfico 1, sobre a utilização de algum software nas aulas de matemáticas, evidenciou-se que dos 12 estudantes, 8 ainda não haviam utilizado nenhum programa computacional nas aulas e 4 estudantes já haviam utilizado algum software nas aulas de matemática. De acordo com o autor Borba e Penteado (2003, p.17), o acesso à informática na educação deve ser visto não apenas como um direito, mas como elemento de um projeto coletivo que prevê a democratização de promover as tecnologias desenvolvidas por essa mesma sociedade. São dessas ambas as formas que a informática na educação deve ser relevada: alfabetização tecnológica e direito ao acesso. Segundo os termos de Piaget, o conhecimento é fruto da interação constante entre a bagagem hereditária e as experiências adquiridas.

Gráfico 2: Questionário de avaliação do software Geogebra



Fonte: O autor (2017).

No que diz respeito à pergunta 2, que aborda o conhecimento do software, 11 estudantes não conheciam nada do Geogebra e 1 tinha pouco de conhecimento. A preocupação com o impacto que as transformações tecnológicas podem ocasionar no processo de ensino-aprendizagem impõe a área da educação a tomada de posição entre tentar incluir as modificações do mundo, produzir o conhecimento pedagógico sobre ele auxiliar o homem a ser sujeito da tecnologia, ou somente produzir as costas para a atual realidade da nossa sociedade baseada na informação (SAMPAIO e LEITE, 2000, SANTOS, 2012, p. 9). Na pergunta 3, que aborda o manuseio do software Geogebra, 5 estudantes tiveram nada de dificuldade, 3 estudantes pouco, 2 estudantes médio e 2 estudantes muita. Observa-se na pergunta 4 do gráfico 2, sobre o estímulo do uso do Geogebra nos estudos das funções afim e quadrática, 6 responderam que o uso do Geogebra auxilia muito e 6 afirmaram ser um estímulo médio. Já na 5, pergunta se o uso do Geogebra nos estudos das funções afim e quadrática tornou a aula mais atraente, 8 estudantes responderam que muito, 2 médio, 1 pouco e 1 nada. No que diz respeito a pergunta 6, se o software Geogebra facilitou na construção das funções afim e quadrática, dos 12 estudantes participantes, 10 responderam que muito, 1 avaliou como médio e 1 como pouco. Na pergunta 7, aborda sobre o uso do software Geogebra como recurso que facilita a aprendizagem nos estudos das funções afim e quadrática, 9 estudantes responderam que muito, 2 estudantes avaliaram como médio e 1 como pouco. Segundo Xavier (2005), as novas gerações têm adquirido o letramento digital antes mesmo de ter se correspondente do letramento alfabético lecionado na escola. Evidencia na pergunta 8 a opinião dos estudantes sobre o uso do Geogebra como uma importante ferramenta de ensino da matemática, 10 responderam que muito e outros 2 avaliaram como pouco. A maioria afirma que o uso do software Geogebra é uma grande ferramenta para o ensino da matemática, o ambiente escolar é preciso adquirir usos tecnológicos para um novo ensino, assim estimulando aos estudantes ao interesse

ao ensino-aprendizagem (FERREIRA, 1995). Na pergunta 9, abordou o que de mais interessante o estudante achou ao utilizar o software Geogebra. Abaixo algumas das opiniões dos estudantes.

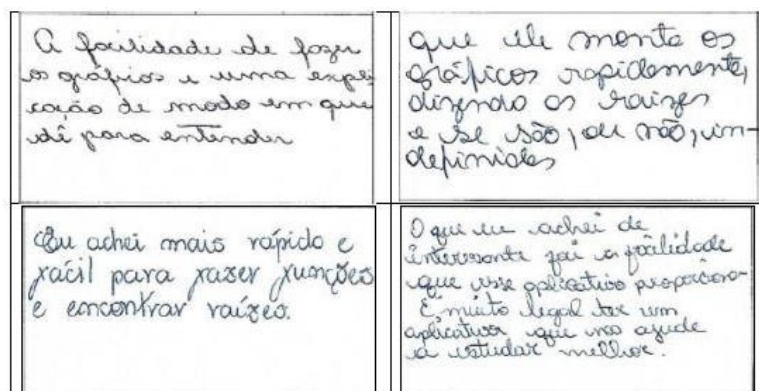


Figura 4 – Opinião de alguns alunos com relação a pergunta 9.

Sobre a pergunta 10, aborda a opinião e sugestão do estudante sobre a utilização do software Geogebra na sala de aula. Abaixo, algumas opiniões dos estudantes:

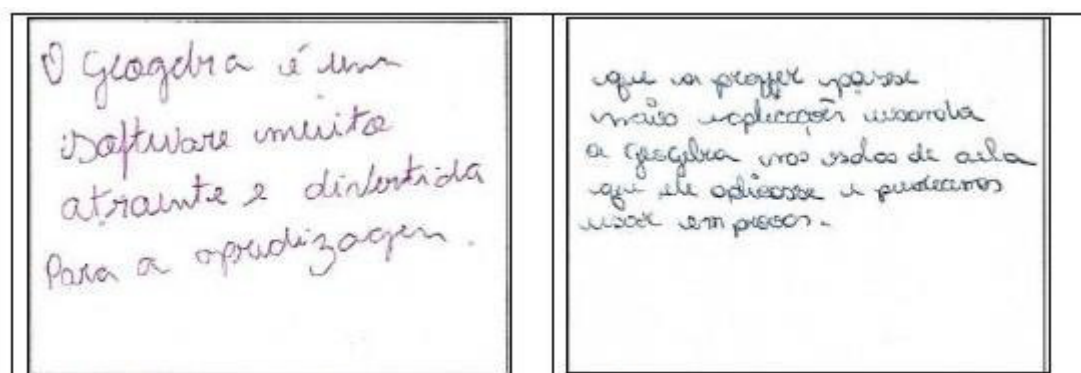


Figura 5 - Opinião de alguns alunos com relação à pergunta 9.

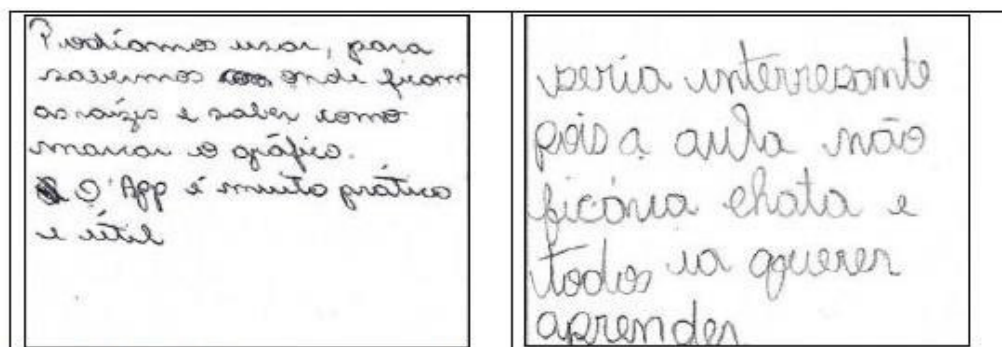


Figura 6 – Opinião de alguns alunos com relação à pergunta 9.

Conclusão

Diante do que foi elaborado percebeu-se que alcançamos as expectativas esperadas de forma positiva, apesar de determinadas dificuldades estruturais e de manuseio com o software Geogebra. O software Geogebra tornou os conteúdos matemáticos de função afim e quadrática mais significativa para os estudantes, o uso do mesmo tornou as atividades matemática mais dinâmica, deixando as aulas mais interessantes, o que contribuiu para a aprendizagem de conteúdos complexos de forma simples. Foi

possível verificar que os alunos participaram da aula com satisfação e contribuíram para a construção do conhecimento, fazendo no Geogebra atividades além do que foi definido. Observou – se também que a prática pedagógica cria uma zona proximal como estabelecida por Piaget, no entanto, as escolas ainda precisam se adequar para utilização do software para sua utilização faz a necessidade de uma estrutura adequada e com um número de computadores compatível ao número de alunos e em bom funcionamento.

Referências

- BORGES NETO, Hermínio. et. al. Manual do Geogebra. Disponível em: <<http://ftp.multimeios.ufc.br/~geomeios/geogebra/manual.htm>>. 2010, Acesso em: 21 jul. 2017.
- CATANEO, Vanessa Isabel. O uso do software geogebra como ferramenta que pode facilitar o processo ensino aprendizagem da matemática no ensino fundamental séries finais. Orleans, SC, 2011.
- DAMAZIO, Ademir. Elaboração de conceitos matemáticos: abordagem histórico-cultural. Criciúma, SC, UNESC, 2006.
- GEOGEBRA. O que é o geogebra. 2009, Disponível em <http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/info>. Acesso em: 7 jul .2017.
- SAVIANI, Dermeval. Pedagogia histórico-crítica. 9.e.d, Campinas, SP: Autores Associados, 2005.
- MELO, Tattiana Fernandes de Oliveira. O software Geogebra como elemento mediador na formação do conceito de polígonos semelhantes: um estudo na perspectiva do ensino desenvolvimental. 158f. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação para Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Jataí, Jataí.
- PERRENOUD, P. Pedagogia Diferenciada: das intenções à ação. Porto Alegre: Artmed, 2007.
- VYGOTSKY, L. S. A formação social da mente. Disponível em:<<http://pt.scribd.com/doc/67579255/1/O-instrumento-e-o-simbolo-no-desenvolvimentoda-crianca>>. 1991. Acesso em 22 jul. 2017.
- VYGOTSKY, Lev Semenovich. A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.
- BORBA, M. C; PENTEADO, M. G. Pesquisas em Informática e Educação Matemática. Educação em Revista. Belo Horizonte, n. 36, 2002. p. 239-53. Acesso em de julho de 2017.
- FERREIRA, A. B. H. Dicionário Aurélio básico da língua portuguesa. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.
- SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO, ESPORTE E LAZER. 2014. O professor frente às novas tecnologias de informação e comunicação, Disponível em <<http://www.seduc.mt.gov.br/Paginas/O-professor-frente-%C3%A0s-novas-tecnologias-de-informa%C3%A7%C3%A3o-e-comunica%C3%A7%C3%A3o.aspx>>. Acesso em: 23 jul .2017.

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E SUAS OCORRÊNCIAS

Brenda Emile Valdemaz Guimarães
Universidade Federal do Espírito Santo
brendaemile@gmail.com

Valdinei Cezar Cardoso
Universidade Federal do Espírito Santo
V13dinei@gmail.com

Resumo: Este estudo é um estudo teórico acerca da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel. Para isso, busca explicitar que a ocorrência da aprendizagem significativa, depende de três fatores: o material deve ser potencialmente significativo, o aluno tem que estar disposto a aprender e possuir conhecimentos prévios que possibilitem a ancoragem de novos conhecimentos, levando assim o melhoramento das estruturas mentais do educando, por meio de algo que o aluno já tenha inserido na sua cognição e com o que ele irá reter os conhecimentos ao longo do tempo. Os resultados indicam que esta teoria é importante para compreender como os alunos aprendem e em que tipos de conteúdos apresentam algum tipo de dificuldade de aprendizagem.

Palavras-chave: Aprendizagem significativa. Organizadores prévios. Conhecimento.

Introdução

A aprendizagem busca ir além do seu mero significado. Ela busca interagir os conhecimentos que o aluno possuem com o que ele irá aprender, sendo essa também a os pressupostos da aprendizagem significativa de Ausubel. Buscando uma melhoria do ensino para que não venha se tornar algo mecânico nem repetitivo.

Assim, o objetivo deste artigo é demonstrar de modo breve, uma ideia de quais processos pode manifestar indícios da ocorrência de aprendizagem significativa. Ausubel denota que a aprendizagem deve ser significativa e não mecânica, pois, a mecânica leva o aluno a um estilo de “decoreba” que logo após a prova é esquecido.

Algumas características desta teoria? Esse tipo de aprendizagem busca conectar aquilo que o aluno já sabe com aquilo que ele irá saber, usando seus conhecimentos prévios como ancoragem para os que virão.

Ausubel (1982), considerava que a aprendizagem precisa fazer sentido para o aluno e, para isso, o conhecimento e as novas informações devem interagir com conceitos já existentes na estrutura cognitiva. Para o autor, aprender significativamente implica em expandir e aprimorar os conhecimentos prévios e, a partir disso, ser capaz de acessar e relacionar conteúdos novos.

Ela depende de dois processos para ocorrer, sendo:

- Que o material deve apresentar ao aluno uma correlação entre o conhecimento existente e o que ele irá aprender,
- Mas, além do material ser adequado, o aluno deve dispor seu interesse em compreender o conteúdo.

Mas, a aprendizagem vai além de ensinar e interagir socialmente, ela vem com o intuito de obter relações que levem o aluno a construir o seu conhecimento. Sendo que o processo de aprendizagem se diferencia de acordo com a idade do aluno, pois, depende da maturação ao qual o aluno se encaixa, pois, a aprendizagem do aluno segue o seu desenvolvimento, devido não ser algo aprendido a qualquer momento a aprendizagem é adquirida ao longo das experiências cadenciadas pelo aluno tanto no âmbito escolar quanto fora dela.

Para o uso destes pressupostos teóricos Ausubel (1982) declara a importância de organizadores prévios que possuem como objetivo informar e compartilhar recursos introdutórios de um determinado conteúdo antes de lhe apresentar a sua definição formal.

A teoria diferencia as condições das aprendizagens significativas e mecânicas, sendo a primeira uma relação existente entre o que se sabe e o que aprenderá. Enquanto na aprendizagem mecânica as informações são apenas armazenadas sem relação com o conhecimento anterior do estudante.

As etapas de aprendizagem significativa são: a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

Como potencializar essa aprendizagem em sala de aula?

A potencialização pode ocorrer por meio da construção do conhecimento que deve ser baseado em ideias mais gerais, partindo do conhecimento geral para o específico

Para Ausubel para a aprendizagem ser produzida na escola ela se distingue em duas dimensões sendo:

- Aprendizagem significativa
- Aprendizagem memorística

A primeira dimensão se refere a como o aluno irá receber os conteúdos, contendo duas divisões, a aprendizagem receptiva, que é aquela na qual o aluno não chega nem a pensar, é como se recebe se tudo pronto e, a aprendizagem por descoberta, que é quando o aluno terá o auxílio do professor, mas terá que buscar resolver o que lhe foi proposto.

Conclusões

Podemos analisar que hoje o aluno enfrenta um ensino muito diferente da sua realidade que visa normalmente para seus próprios interesses, mas a teoria de Ausubel busca um meio diferente onde venha aproveitar o conhecimento que o aluno tenha adquirido ao longo do tempo e englobar o que ele irá aprender, encaixando no que já tenha, usando o método da ancoragem. Assim, podemos concluir que o professor é também um mediador que auxilia o aluno, além do livro didático que será usado para o processo de aprendizagem do educando. Mas, o professor deve estar apto não só em relação ao conhecimento mas, também no auto desejo de ensinar, de encorajar o aluno para melhorar o seu desempenho e, também, na sua capacidade de auto entendimento do aluno.

Concluimos que para ocorrer a aprendizagem depende de todo um processo que encube total interesse do aluno, livros didáticos que auxiliem na aprendizagem, enfim, engloba um meio onde cada um desempenha um papel importante para o crescimento intelectual dos educandos nas escolas.

Referências

AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

O uso do Scratch 2.0 para o ensino e aprendizagem de frações

Arina de Jesus Rozário

Universidade Federal do Espírito Santo

dejesusarina@gmail.com

Valdinei Cezar Cardoso

Universidade Federal do Espírito Santo

v13dinei@gmail.com

Resumo: Neste trabalho, nos fundamentamos no estudo da Teoria Cognitiva da Aprendizagem Multimídia (TCAM), para a utilização do *Scratch* 2.0 na criação de conteúdo didático para o ensino de frações. A partir do Estudo da TCAM elaboramos uma animação relacionada ao conceito de fração, assim como a demonstração de sua utilização. Foi utilizado o livro do 6º ano do Ensino Fundamental na elaboração.

Palavras-chave: Animação. Matemática. *Scratch*.

Introdução

O *Scratch* 2.0 foi criado por investigadores do MIT (Laboratório de Media do Instituto de Massachusetts). É um *software* gratuito, disponível em: <https://scratch.mit.edu/>, que permite a construção de jogos, animações e clips musicais. Para a criação dos projetos por meio do *Scratch*, são disponibilizados palcos e Sprites que seriam, respectivamente, cenários e personagens. Os palcos podem ser importados do próprio computador ou editados no próprio *software*. Os comandos são arrastados e encaixados como um quebra-cabeça para que os personagens realizem ações.

Como base teórica do trabalho, utilizamos a teoria cognitiva da aprendizagem multimídia. Essa teoria foi criada por Mayer, que afirma que o homem aprende de maneira concreta quando são associados vídeos a imagens. Segundo ele, o ser humano possui duplo canal de processamento, auditivo e visual, no entanto sua memória tem capacidade limitada de processamento de determinada informação multimídia de uma só vez.

Assim, uma animação no *Scratch* possuindo imagens, áudios e legendas seria processado pelo aluno utilizando os dois canais, facilitando a aprendizagem. Segundo a teoria existem cinco processos cognitivos envolvendo a aprendizagem. Mayer também enumerou doze princípios que relacionam característica que devem existir na mídia para que a aprendizagem seja eficaz.

A partir dos escritos de Mayer (2009), utilizamos a teoria cognitiva da aprendizagem multimídia para a criação de uma animação no *Scratch*. Com base nos princípios dessa teoria, analisamos o conteúdo de frações de um livro de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental, retirando deste, pontos importantes a serem retratados numa animação. A criação dessa, partiu de comandos simples do *Scratch*, levando em consideração os doze princípios propostos na teoria. A animação é composta de fatos cotidianos que explicam em teoria o que é fração e utiliza exemplos para indicar as formas como essa pode ser usada.

Submissão

A Teoria Cognitiva da Aprendizagem Multimídia (TCAM), é utilizada em situações educacionais para a criação de material didático e também para a análise da interação e aprendizagem do aluno utilizando recursos digitais. Criada por Richard E. Mayer a TCAM defende que a aprendizagem parte da percepção e do pensamento e afirma que o aprender passa pelo visual e auditivo, tendo essas capacidades limitadas de processamento.

Para Mayer (2009) a aprendizagem multimídia é um processo difícil dependente de vários fatores, entre eles está o material didático e a interação dos envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem. Ele acredita que a linguagem verbal e não verbal se completa, não sendo uma subordinada a outra. Na TCAM as imagens e áudios componentes da mídia educativa, facilitam a compreensão. Silva (2013) traz o exemplo de uma pessoa assistindo um filme com áudio no idioma conhecida por ela, facilitando o processamento que passará pelo auditivo e visual.

Para Mayer as mídias devem enfatizar as ideias centrais, descartando informações desnecessárias. Por isso, ele enumerou doze princípios que podem otimizar ou prejudicar a aprendizagem por meio das mídias educacionais, dependendo da construção de cada uma.

Os doze princípios, resumidamente, propõem semelhanças entre imagem e áudio, destaque de pontos importantes no material de estudo, utilização de imagens e áudio, tornando a aprendizagem mais precisa, a proximidade entre imagens apresentadas e texto correspondente, assim como a simultaneidade na apresentação destas. Também é afirmada a organização dos conceitos, assim como a introdução ao assunto abordado na mídia. A apresentação de gráficos e narrações. E a utilização de voz humana e não de máquinas.

A partir desses princípios foi feita a análise do livro didático do Imenes e Lellis (2009) Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental, neste livro analisamos o capítulo que aborda o conteúdo de frações. O livro introduz rapidamente o conceito de fração e explora bastante o uso de exemplos do cotidiano (figura 01) e também figuras geométricas. No livro é contada a história das frações desde sua criação no Egito.

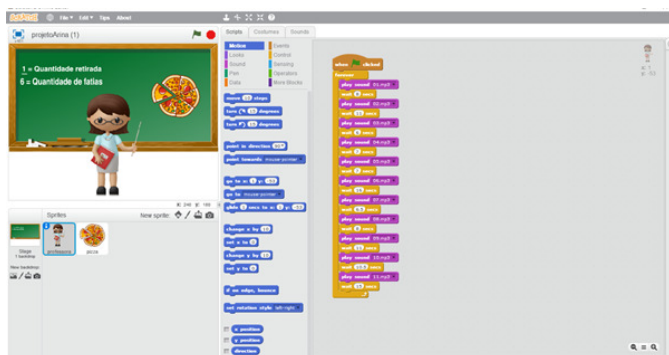
Figura 01: Exemplo



Fonte: Imenes e Lellis (2009, p.113)

Por meio da análise podemos concluir que o livro é bem ilustrado, as imagens e trechos correspondentes são postas em mesma página assim como é respeitada a semelhança entre elas. A explicação dos exemplos é bem detalhista facilitando a aprendizagem.

Após o estudo do livro, buscamos os pontos que poderiam ser empregados e ensinados com maior sucesso em mídias digitais. Utilizando o Scratch 2.0 propomos a construção de uma animação (figura 02) que apresentasse aos alunos o conceito inicial de fração, assim como um dos meios onde ele pode ser empregado.

Figura02:

Fonte: Projeto Arina no scratch

Para o desenvolvimento da animação procuramos obedecer aos doze princípios de Mayer, optamos por utilizar a voz humana durante a explicação para aproximar o ouvinte do conteúdo apresentado, utilizamos também um exemplo cotidiano e a partir dele explicamos o conceito e componente das frações, tentamos priorizar as imagens e não utilizar muitos textos durante a animação para evitar a sobrecarga de um dos canais de processamento.

A animação inicialmente tem estruturação simples, utilizando comandos básicos do *Scratch*. Mas por ser uma ferramenta facilmente maleável, há muitos recursos que podem ser empregados, tornando o conteúdo didático mais dinâmico e instrutivo.

Conclusões

A partir dos pressupostos da TCAM, utilizamos o Scratch como ferramenta de construção de conteúdos didáticos digitais para ensinar frações utilizando conceitos do 6º ano do Ensino Fundamental. Inicialmente, analisamos o livro didático de acordo com os 12 princípios da TCAM. Após, elaboramos uma animação que trabalhasse tanto com o processamento visual como auditivo.

A animação introduz o conceito de fração e utilizando exemplos do cotidiano para expressar uma das formas de utilizar a fração. Criada para melhorar o desempenho do aluno, esta possui áudio e imagens que possibilitam a utilização dos dois canais de processamento, auditivo e visual, facilitando a aprendizagem.

Durante toda a pesquisa, pudemos constatar a partir da leitura de Mayer (2009), que a TCAM traz melhoria no desempenho da aprendizagem. Assim, defendemos que essa metodologia deve ser utilizada como um recurso a mais para o ensino. Pois é uma forma de potencializar ensino e aprendizagem, instigando os alunos a pensarem e se tornarem ativos no papel de aprender. Aumento também a quantidade de conteúdo importante captado pelo indivíduo durante o processamento.

Referências

Imenes, Luiz Márcio; Matemática: Imenes & Lelis/Luiz Márcio Imenes, Marcelo Lellis.-1.ed.- São Paulo: Moderna, 2009.

MAYER, R. E.. Multimedia Learning. New York: Cambridge University Press, 2009.

SILVA, R. R. da. A transposição com expansão do conteúdo do livro didático de matemática para o tablete na perspectiva da teoria cognitiva de aprendizagem multimídia. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, 2013.

Dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção com gerenciamento da demanda via pedidos

Rudivan Paixão Barbosa
Universidade de São Paulo
rudivan@usp.br

Willy Alves de Oliveira Soler
Instituto de Matemática, UFMS
willy.oliveira@ufms.br

Maristela Oliveira dos Santos
Universidade de São Paulo
mari@icmc.usp.br

Resumo: O problema de dimensionamento e sequenciamento tem como objetivo determinar os tamanhos de lotes juntamente com sequência de produção desses, em cada período de um horizonte de planejamento, de modo a otimizar um objetivo. Neste trabalho consideramos o problema onde as demandas são gerenciadas via pedidos de clientes, os quais podem ser compostos por diversos itens. Os clientes não recebem pedidos parciais, de modo que, se não houver capacidade produtiva para produzir todos os itens solicitados num mesmo pedido, o pedido será rejeitado. Além disso, cada pedido deve ser entregue dentro de uma janela de tempo especificada pelo cliente e os itens produzidos são perecíveis, podendo permanecer estocados por tempo limitado. Testes preliminares, utilizando um modelo de otimização linear inteira, mostram que a qualidade das soluções fornecidas por um solver de otimização é influenciada pela qualidade dos limitantes, principalmente os duais, obtidos dentro de um limite de tempo definido. Assim, o objetivo do trabalho é propor novas formulações/reformulações para melhorar a qualidade das soluções obtidas.

Palavras-chave: Otimização linear inteira. Dimensionamento e sequenciamento de lotes. Pedidos.

Introdução

O problema de dimensionamento de lotes consiste em planejar a quantidade a ser produzida dos itens em cada período ao longo de um horizonte de tempo finito, de modo a atender uma certa demanda e otimizar uma função objetivo. O problema de decidir, de maneira integrada o tamanho e a sequência dos lotes de produção é conhecido na literatura como problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes. Uma revisão recente sobre problemas integrados de dimensionamento de lotes pode ser encontrada em Copil et al.(2016). Os autores apresentam um esquema de classificação de modelos propostos.

A maioria dos trabalhos encontrados na literatura consideram o problema com o gerenciamento dos pedidos dos clientes desagregados em demanda, ou seja, procuram atender a demanda dos itens. No entanto, geralmente os clientes solicitam itens distintos agrupados em pedidos. Ao tratar o problema considerando o atendimento dos clientes via itens e permitir atrasos no atendimento da demanda, o pedido do cliente poderá ser entregue parcialmente. Em algumas indústrias alimentícias, os clientes (que podem ser restaurantes e/ou supermercados, por exemplo) usualmente realizam pedidos compostos por vários itens e não possuem interesse no atendimento parcial de seu pedido, pois pode ser necessário buscar os produtos, não entregues, em outros fornecedores, aumentando os custos.

Serethi & Bijari (2013) tratam o problema integrado com possibilidade do não atendimento da demanda dos produtos. O objetivo é maximizar o lucro associado ao atendimento da demanda de cada item. O problema considerado pelos autores não gerencia as demandas via pedidos, mas sim, item por item. Um trabalho da literatura diretamente relacionado ao problema considerado neste trabalho é o de Furtado (2012) que trata problema com gerenciamento de pedidos em fundições de pequeno porte. Os modelos

propostos permitem atrasos no atendimento dos pedidos, que são penalizados na função objetivo. Estes atrasos, se postergados até o fim do horizonte de planejamento, levam ao não atendimento do pedido. O problema foi modelado como um problema de dimensionamento de lotes multiestágio, considerando os pedidos como itens finais e os itens solicitados como os itens componentes. Evitam os atendimentos parciais antes do final do horizonte de planejamento.

Recentemente Teixeira et al.(2017) propuseram um modelo de programação linear inteira mista para tratar o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes com gerenciamento de pedidos. Além disso, apresentaram um procedimento de solução do tipo *Fix-and-Optimize*. As soluções obtidas utilizando o solver CPLEX para exemplares com 10 períodos, 25 itens, 30 pedidos e janelas de tempo iguais de 3 períodos, apresentam desvios médios de 67%, enquanto que as soluções fornecidas pela heurística apresentam desvio médio de 60%.

Neste trabalho foi proposta uma reformulação do modelo apresentado em Teixeira et al. (2017) para considerar a idade do produto em estoque, como feito em Li et al. (2016). Testes preliminares foram feitos utilizando novas instâncias e essa reformulação. Destas instâncias, foram selecionadas 5 considerando 20 períodos, 50 itens, 90 pedidos e janelas de tempo distintas para cada pedido. As soluções foram obtidas utilizando o solver CPLEX. O gap médio observado foi de 87.83% e 95.00% no modelo anterior.

Conclusões

Neste trabalho consideramos um problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes onde o gerenciamento das demandas é realizado via pedidos. Testes computacionais foram realizados com auxílio de um software de otimização utilizando uma reformulação do modelo proposto em Teixeira et al.(2017) e as soluções foram analisadas. Com o intuito de melhorar a qualidade das soluções obtidas, reformulações do modelo foram investigadas. Além disso, investigaremos métodos de solução baseados no modelo matemático.

Referências

COPIL, K. et al. Simultaneous lotsizing and scheduling problems: a classification and review of models. **OR Spectrum**, p. 1-64, 2016.

FURTADO, M.G. S. **O planejamento da produção de pedidos em fundições de pequeno porte**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ciências de Computação e Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

LI, Y.; CHU, F.; YANG, Z.; CALVO, R. W. A production inventory routing planning for perishable food with quality consideration. **IFAC-PapersOnLine**, v. 49, n. 3, p. 407-412, 2016. 14th IFAC Symposium on Control in Transportation SystemsCTS 2016.

SERESHTI, N.; BIJARI, M. Profit maximization in simultaneous lot-sizing and scheduling problem. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, n. 23, p. 9516 - 9523, 2013.

TEIXEIRA, V.U.D.; OLIVEIRA, W. A. ; SANTOS, M. O. Um problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção com gerenciamento da demanda via pedidos e com tempos/custos de preparação dependentes da sequência. **Anais XLIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, Blumenau: FURB, 2017. p. 2938-2946.

Um estudo numérico do método dos Gradientes Conjugados para a solução de sistemas lineares formados com a matriz de Hilbert

Yeverson Carlos Costa dos Santos, Thiago Silva Mantegazini, Fernando Guirra Silva, Natacha Sousa Javarini, Rafaela Freita Santos, Rodolfo Santos Bertolo
Curso de Bacharelado em Matemática Industrial - UFES, São Mateus
yeverson.santos@aluno.ufes.br; thiago.mantegazini@aluno.ufes.br; fernando.g.silva@aluno.ufes.br;
natacha.javarini@aluno.ufes.br; rafaela.santos.58@aluno.ufes.br; rodolfo.bertolo@aluno.ufes.br

Isaac P. Santos
Departamento de Matemática Aplicada - UFES, São Mateus
isaac.santos@ufes.br

Resumo: Nesse trabalho apresentamos um estudo numérico dos métodos dos Gradientes Conjugados e Gradientes Conjugados Precondicionado (com preconditionadores de Jacobi e Gauss-Seidel) na solução de sistemas lineares formados com a matriz de Hilbert. Os resultados numéricos são apresentados para vários tamanhos da matriz de Hilbert.

Palavras-chave: Matriz de Hilbert. Método dos Gradientes Conjugados. Precondicionamento.

Introdução

A matriz de Hilbert, introduzida por Hilbert em (HILBERT, 1894) para estudar um problema de aproximação envolvendo polinômios de Legendre, é um exemplo de uma matriz extremamente mal-condicionada, dificultando o seu uso em aplicações que envolvem cálculos numéricos. Os elementos da matriz de Hilbert H_n , de ordem n , são descritos por $H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. A matriz de Hilbert é simétrica e positiva definida, isto é, $H_n^T = H_n$ e $\mathbf{x}^T H_n \mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_*^n$. Além disso, todos os seus autovalores são reais e positivos (SULI and MAYERS, 2003). Nosso objetivo é fazer um estudo numérico dos métodos Gradientes Conjugados (GC) e Gradientes Conjugados Precondicionados, usando os preconditionadores de Jacobi (GCP-J) e de Gauss-Seidel (GCP-GS), para resolver sistemas lineares da forma $H_n \mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde H_n é uma matriz de Hilbert de ordem n , $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ são vetores de $\mathbb{R}^n$. O método GC foi proposto por Hestenes e Stiefel em (HESTENES & STIEFEL, 1952). Existe uma vasta literatura sobre esse método e seus variantes preconditionados. O método GC é eficiente quando a matriz é bem condicionada. No caso da matriz de Hilbert, seu mal condicionamento acentuado prejudica a aplicação do método GC. Segundo Gaustshi (2002),

"A system of order $n = 10$, for example, cannot be solved with any reliability in single precision on a 14-decimal computer. Double precision will be "exhausted" by the time we reach $n = 20$."

Isso mostra a dificuldade em resolver esse problema numericamente. A implementação dos métodos GC, GCP-J e GCP-GS foi de acordo com o Algoritmo 1, usando o ambiente Octave. A matriz M descreve o preconditionador utilizado. Para o método GC, $M = I$; para o método GCP-J, $M = D$ e para o método GCP-GS, $M = (D + L)D^{-1}(D + U)$, onde L , D e U são as submatrizes triangular inferior, diagonal principal e triangular superior da matriz A .

A Tabela 1 mostra o número de iteração e os erros absolutos na norma Euclidiana para cada método iterativo e os erros obtidos usando o comando `\` do Octave para $n = 10, 20, 50, 100, 150$, com $\mathbf{x} = (1, \dots, 1)^T$, condição inicial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ e $tol = 10^{-6}$. Os métodos GC e GCP-J tiveram desempenhos parecidos, enquanto que o GCP-GS não se comportou bem para esse problema, degenerando o erro para n grande. A solução do problema com o comando `\` do Octave para $n \geq 15$, aparece a mensagem *"warning: matrix singular"*

Algoritmo 1 Método Gradiente Conjugado Precondicionado

Entrada: $\mathbf{x}_0 = 0, A, M, \mathbf{b}, N_{max}, tol;$

$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b}; \quad \mathbf{w}_0 = M^{-1}\mathbf{r}_0; \quad \delta_{novo} = \mathbf{r}_0^T \mathbf{w}_0; \quad \delta_0 = \delta_{novo}; \quad \varepsilon = tol^2 \delta_0; \quad k = 0;$

enquanto $k < N_{max}$ **e** $\delta_{novo} > \varepsilon$ **faça**

$\mathbf{p}_k = A\mathbf{w}_k;$

$\alpha_k = \frac{\delta_{novo}}{\mathbf{w}_k^T \mathbf{p}_k};$

$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{w}_k;$

$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{p}_k;$

$\delta_{velho} = \delta_{novo};$

$\mathbf{s} = M^{-1}\mathbf{r}_{k+1};$

$\delta_{novo} = \mathbf{s}^T \mathbf{r}_{k+1};$

$\beta_k = \frac{\delta_{novo}}{\delta_{velho}};$

$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{s} + \beta_k \mathbf{w}_k;$

$k = k + 1;$

fim enquanto

Tabela 1: Matriz de Hilbert: condição da matriz, número de iterações e erro absoluto na norma Euclidiana.

		\	GC		GCP-J		GCP-GS	
n	$Cond(A)$	$erro$	$iter$	$erro$	$iter$	$erro$	$iter$	$erro$
10	$1.60e+13$	$6.71e-04$	4	$3.45e-02$	4	$3.49e-02$	5	$8.52e-01$
20	$1.36e+18$	$1.55e-01$	5	$3.25e-02$	5	$3.30e-02$	6	$1.79e+00$
50	$2.31e+19$	$2.62e-02$	5	$1.29e-01$	5	$1.35e-01$	8	$5.35e+00$
100	$1.99e+19$	$7.09e-01$	6	$1.24e-01$	6	$1.32e-01$	10	$1.06e+01$
150	$1.53e+20$	$4.50e+00$	6	$2.00e-01$	7	$2.18e-01$	12	$1.35e+01$

to machine precision”, informando que a matriz não é inversível, considerando a precisão da máquina. Os números de condição das matrizes, mostrados na Tabela 1, foram calculados usando o comando *cond* do Octave.

Conclusões

Neste trabalho apresentamos um estudo numéricos dos métodos GC, GCP-J e GCP-GS na solução de sistemas lineares extremamente mal condicionados formados com a matriz de Hilbert. Os métodos pre-condicionados não melhoraram a solução do GC. Os métodos GC e GCP-J tiveram um bom desempenho em termos de número de iterações, enquanto que o método GCP-GS apresentou um erro relativamente grande para $n \geq 20$.

Referências

GAUTSCHI, W. **Numerical Analysis**. 2.ed. New York: Birkhauser Verlag, 2012.

SULI, E. and MAYERS, D. **An introduction to numerical analysis**. 1.ed. New York: Cambridge University press, 2003.

HESTENES, M.R. and STIEFEL, E. Methods of Conjugate Gadients for Solving Linear Systems. **Journal of Research of the National Bureau of Standards**, 49, 409-436, 1952.

HILBERT, D. Ein Beitrag zur Theorie des Legendre’schen Polynoms. **Acta Mathematica, Springer Netherlands**, v. 18, p. 155-159, 1894.

O MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO E O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Jader de Oliveira

IFES

jader.oliveira@ifes.edu.br

Luciano Lessa Lorenzoni

IFES

llorenzoni@ifes.edu.br

Alexandre Krüger Zocolotti

IFES

akruger.vix@gmail.com.br

Resumo: Este trabalho investiga em que medida o ensino-aprendizagem de Geometria Analítica para alunos de ensino médio pode ser facilitado a partir da utilização de Modelos de Programação Linear. Os modelos com Programação Linear são utilizados nas mais variadas áreas. Como exemplos de aplicação da ferramenta da programação linear temos: problemas de transporte, transbordo e designação; planejamento da produção; programação de projetos; mistura de produtos; gestão financeira; ajustes de curvas; corte e empacotamento e controle ótimo de sistemas lineares. Essa é uma pesquisa qualitativa. Os sujeitos da pesquisa são alunos do Ensino Médio de uma instituição pública de ensino, localizada no município de Vitória, ES. Para a verificação da aprendizagem do objeto matemático sistemas lineares será utilizada a teoria dos registros de representação semiótica, expressos em linguagem matemática na forma de gráficos, tabelas, figuras geométricas, diagramas, esquemas entre outros.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Modelos de Programação Linear. Registros de Representação Semiótica. Ensino de geometria.

Introdução

Após verificar a dificuldade enfrentada por diversos alunos para a aprendizagem do objeto matemático Geometria Analítica, optamos por um trabalho de pesquisa que inclui a aplicação de uma atividade de Modelagem Matemática envolvendo os modelos de Programação Linear. A ideia de aplicar em conjunto a Modelagem Matemática e a Programação Linear fez surgir a seguinte pergunta: Como os modelos de programação linear podem ser propostos/utilizados nas aulas de matemática de forma a contribuir para a aprendizagem de sistemas lineares? De que modo a utilização de modelos de programação linear pode contribuir nos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria Analítica em uma turma de Ensino Médio? Na tentativa de responder à pergunta formulada anteriormente, o presente trabalho terá, como Objetivo Geral: Investigar as possíveis contribuições da utilização dos modelos de programação linear para o ensino-aprendizagem de geometria analítica

Metodologia

Foram conduzidos um conjunto de cinco atividades, aplicadas durante os meses de fevereiro e março de 2018, em uma turma regular de um curso técnico em Eletrotécnica, integrado ao Ensino Médio de uma instituição pública de ensino, localizada no município de Vitória/ES.

Desenvolvimento da Pesquisa

Durante o primeiro encontro, os participantes – 22 alunos com idades entre 17 e 18 anos – resolveram, sem qualquer intervenção docente, dois problemas envolvendo geometria analítica: no primeiro, os dados envolviam valores discretos, o que permitia a busca da solução por meio da tentativa e erro, já que o número de casos era pequeno; o seu segundo problema envolvia grandezas contínuas, o que demandou a utilização de conhecimentos sobre a resolução de sistemas 2×2 (Método da Adição ou da Substituição). A última atividade desse encontro consistia na identificação de regiões no Plano Cartesiano e foi conduzida pelo docente que ministra aulas de matemática nessa turma. No segundo encontro, com os alunos divididos em duplas, foi proposto um problema que envolvia o conhecimento de Programação Linear; ainda que os alunos não conhecessem tais métodos, a intenção era verificar se resolveriam (e como resolveriam) a situação proposta. Após cada dupla entregar sua resolução, o regente apresentou a solução utilizando a Programação Linear. O terceiro encontro – cada encontro tinha a duração de 100 minutos – foi totalmente destinado para que cada dupla resolvesse um único problema utilizando as técnicas discutidas no encontro anterior. No último encontro foi feita a avaliação das ações, com os participantes respondendo a um questionário com cinco questões abertas e que discutiam as técnicas e os assuntos trabalhados durante os três encontros anteriores.

Considerações

Quanto ao objetivo do trabalho, *investigar se a resolução de problemas de Modelos de Programação Linear contribui para o processo de ensino e de aprendizagem de Geometria Analítica em uma turma de Ensino Médio*, acreditamos que possamos dizer que sim: a Programação Linear pode ser usada como um elemento de motivação ou de contextualização para a Geometria Analítica. As diversas representações feitas pelos participantes ao longo das atividades mostram aquilo que Duval (2014) afirma: utilizar diferentes tipos de registros semióticos mostra uma evolução quanto ao conhecimento matemático. Nesse sentido, acreditamos que os participantes, à medida que a intervenção foi feita, foram adquirindo novos conhecimentos matemáticos, dado a diversidade de representações que utilizavam para representar suas ideias. Por fim, fica a certeza de que se faz necessário integrar as “Matemáticas” Escolar e Cotidiana. Sobre isso, acreditamos a Programação Linear pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Geometria Analítica, trazendo as restrições impostas por um mundo real, para o universo de um mundo escolar ideal.

Referências

- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2014. BASSANEZI, R. C. *Modelagem matemática: teoria e prática*. São Paulo: Contexto, 2015.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2013.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.
- DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. 8. ed. Porto Alegre: Mc Graw

Estratégia de Cálculo dos Modos Acústicos no Interior de Júpiter

Luiz Gabriel Souza de Oliveira
Departamento de Ciências Naturais - UFES
luiz.g.oliveira@ufes.br

Natália Valadares de Oliveira
Departamento de Ciências Naturais - UFES
natalia.oliveira@ufes.br

Alexandre Pasti
Graduando em Engenharia de Petróleo - UFES
alexandrepasti1@gmail.com

Resumo: O presente trabalho apresenta uma metodologia de estudo da estrutura interna de Júpiter por meio da técnica dos modos normais, amplamente utilizada em estudos de Sismologia Global no planeta Terra. Por meio da aproximação assintótica, modos de pressão podem ser determinados no interior do gigante gasoso, com velocidade de propagação e frequência sendo determinadas para cada harmônico correspondente. Deste modo, a resposta sísmica de diferentes modelos composicionais para Júpiter pode ser determinada, podendo ser utilizada como ferramenta de entendimento para sua estruturação e dinâmica internas

Palavras-chave: Júpiter. Estrutura Interna. Modos Normais. Sismologia Global.

Introdução

O planeta Júpiter é caracterizado por sua natureza líquido-gasosa, com intensa atividade convectiva e podendo ser considerado como um sistema termodinâmico adiabático. Dados obtidos pelas missões espaciais *Pioneer*, *Voyager* e *Galileo* permitiram tecer considerações e construir modelos físicos de seu interior, a partir da análise dos momentos de inércia gravitacionais J_2 , J_4 e J_6 , além de sua figura de equilíbrio e do seu período de rotação. Por outro lado, dados sobre a composição química de sua atmosfera e temperatura de sua superfície podem ser usadas como condições de contorno na modelagem de seu interior (IRWIN, 2009).

Devido a intensa atividade observada em sua atmosfera, é perfeitamente plausível assumir um interior extremamente turbulento e extremamente quente, o que pode estar vinculado ao intenso fluxo térmico e a presença de um vigoroso campo magnético. Desta forma, pode-se esperar o aparecimento das chamadas oscilações livres (ou modos normais) em escala planetária, que já foram observados, e que semelhante aos mesmos padrões de oscilação vinculados a sismos de grande magnitude na Terra, permitem construir modelos de estrutura interna deste gigante gasoso, levando em consideração a resposta teórica calculado a partir da teoria dos modos normais, amplamente empregada em estudos de sismologia global terrestre (THONG, 2015).

Modos Acústicos e a Estrutura Interna de Júpiter

Os planetas gasosos diferem dos rochosos principalmente pelo tamanho e composição. Estes gigantes são constituídos basicamente por hidrogênio e hélio, estando na forma molecular em sua atmosfera extremamente turbulenta e no estado metálico devido às extremas condições de pressão e temperatura em seu interior, onde provavelmente seu núcleo pode ser composto por uma mistura de gelo e rochas. Na construção dos modelos interiores de distribuição de densidades e pressões, as

seguintes condições são levadas em consideração: i) relação adiabática entre pressão e densidade e ii) equilíbrio hidrostático. Complicações posteriores podem surgir se forem introduzidos parâmetros como rotação diferencial, achatamento e mudanças de fase associadas a sua composição (COOK 1980).

Diferentemente da Heliossismologia, onde os modos de oscilação ligados a ondas de pressão (modos-p) e de gravidade (modos-g) são utilizados para investigar a estrutura interna do Sol, a sismologia aplicada em Júpiter baseia-se fortemente na investigação da relação dos modos-p (acústicos) com a sua estrutura interna. Neste contexto, o uso da teoria de aproximação assintótica funciona de maneira muito eficaz na determinação das frequências e padrões de distribuição de energia dos modos-p no interior de Júpiter. Portanto, a determinação dos modos-p de alta frequência, onde as pulsações de frequência $\omega_{n,l}$ podem ser determinadas pela seguinte relação (GUENTHER 1991):

$$\frac{(n+\alpha)\pi}{\omega_{n,l}} = \int_{s_{n,l}}^{s_l} \left(\frac{s^2}{c(s)^2} - \frac{L^2}{\omega_{n,l}^2} \right)^{1/2} \frac{ds}{s} \quad (1)$$

onde s representa o raio médio do planeta, s_l o raio externo médio, n a ordem radial do modo de pressão, l o grau correspondente e $L^2 = l(l+1)$, α é um parâmetro que representa a defasagem na frequência e $c(s)$ é a velocidade do som.

Estratégia de Cálculo dos Modos Acústicos

A partir de um modelo de composição interna, baseado nas proporções de H e He, cujas densidades, temperaturas e pressões são calculadas a partir do uso de equações de estado presentes na literatura, considerando quatro camadas básicas (i- um envelope externo de H-He molecular, ii- um envelope interno de H-He molecular, iii- um envelope de H-He metálico e iv- um núcleo composto de rocha e gelo), o espectro dos modos-p é calculado pela aproximação assintótica, onde um sistema de equações diferenciais é resolvido numericamente com uso do pacote computacional *GYRE* (TOWNSEND & TEITLER, 2013), obtendo para cada harmônico sua frequência e padrão de oscilação correspondente. Deste modo, diferentes modelos composicionais gerem diferentes padrões oscilatórios associados aos modos-p, que podem ser confrontados com as observações disponíveis.

Referências

COOK, A.H. **Interior of the Planets**. Cambridge University Press, 1980.

GUENTHER, D. B. The p-mode oscillation spectra of an evolving 1M sun-like star. **Astrophysical Journal**, 375, p. 352-365, 1991.

IRWIN, P. **Giant Planets of Our Solar System – Atmospheres, Composition and Structure**. Springer, 2009.

TOWNSEND, R.H.D. & TEITLER, S.A. GYRE: an open-source stellar oscillation code based on a new Magnus Multiple Shooting scheme. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, 435, p. 3408-3418, 2013.

THONG, V.C.H. **Extraterrestrial Seismology**. Cambridge University Press, 2015.

Simulação Numérica da Propagação de Calor de um Incêndio em Recinto Fechado Utilizando uma Formulação de Função de Fluxo e Vorticidade

Thiago Alves de Souza
Universidade Federal Rural do
Rio de Janeiro (UFRRJ)
tas_ufrj@hotmail.com

Carlos Andrés Reyna
Vera-Tudela
Universidade Federal
Rural do Rio de Janeiro

Resumo: O objetivo da pesquisa é entender a propagação de calor em um incêndio em recintos fechados através de uma fonte de calor, onde ocorrem fluxos turbulentos em uma cavidade quadrada com abertura lateral. Essa modelagem tem bastante interesse e amplas aplicações em projetos térmicos de prédios, avaliações de riscos e gestão de segurança contra incêndios.

Palavras-chave: Função Fluxo. Vorticidade. Número de Rayleigh. Diferenças Finitas.

Introdução

Os incêndios ocorrem através de fluxos provocados pela fonte de calor, onde esses fluxos são estudados utilizando uma formulação de função de fluxo e vorticidade, e transferência de calor aplicada às equações governantes utilizando o Método das Diferenças Finitas. Os testes são implementados considerando uma abertura lateral na cavidade, que nesse caso pode simular uma janela ou um exaustor, em diferentes números de Rayleigh onde os resultados serão discutidos, fez se também simulações utilizando o tamanho da abertura na cavidade, mas sem nenhum resultado preliminar por enquanto.

Um dos primeiros trabalhos de pesquisa utilizando modelos de campo para prever o comportamento do fogo foi em cabines de aeronaves apresentado por Markatos et al.(1982). A fonte de fogo é representada pela fonte de calor volumétrica e o fenômeno de transporte devido ao fogo é modelado como fluxo turbulento induzido pela instabilidade bidimensional utilizando um modelo de turbulência k-epsilon (MARKATOS,1982, P.63). Simulações posteriores foram realizadas por Markatos & Pericleous (1984) para prever a distribuição de fluxo de ar e temperatura em um compartimento 3D contendo uma fonte de calor. Seus resultados numéricos foram comparados com observações experimentais feitas em CFD.

Modelo Matemático

As equações governantes utilizadas serão as Equações de Navier-Stokes, Equação da Continuidade e a Equação de Energia respectivamente.

$$U\partial_x U + V\partial_y U = -\rho^{-1}\partial_x P + \nu(\partial_{xx}^2 U + \partial_{yy}^2 U) \quad (1)$$

$$U\partial_x V + V\partial_y V = -\rho^{-1}\partial_y P + \nu(\partial_{xx}^2 V + \partial_{yy}^2 V) + g\beta(T - T_\infty) \quad (2)$$

$$\partial_x U + \partial_y V = 0 \quad (3)$$

$$U\partial_x T + V\partial_y T = \alpha(\partial_{xx}^2 T + \partial_{yy}^2 T) \quad (4)$$

Onde ν é a viscosidade cinemática, β é o coeficiente de expansão térmica, g é aceleração da gravidade e α é o coeficiente de difusão térmica.

Adimensionalizando e aplicando as definições de função de fluxo e Vorticidade, chega-se.

$$\partial_{xx}^2 \psi + \partial_{yy}^2 \psi = -\omega \quad (5)$$

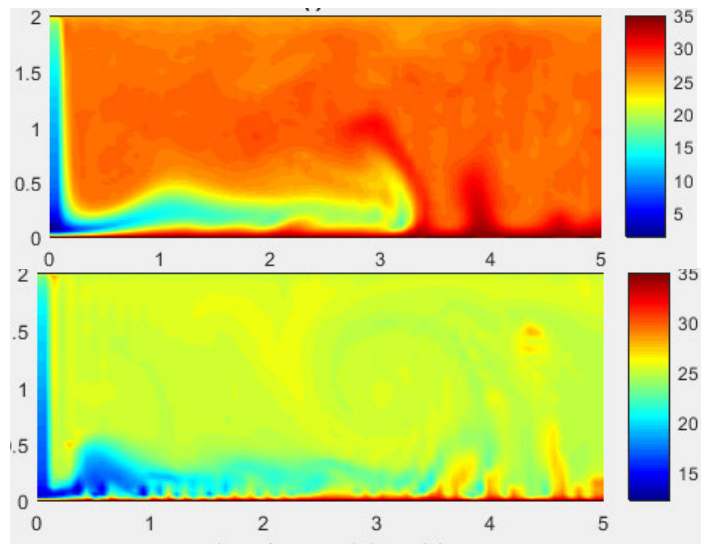
$$\partial_y \psi \partial_x \omega - \partial_x \psi \partial_y \omega = \text{Pr}(\partial_{xx}^2 \omega + \partial_{yy}^2 \omega) - \text{Ra} \partial_x \theta \quad (6)$$

$$\partial_y \psi \partial_x \theta - \partial_x \psi \partial_y \theta = (\partial_{xx}^2 \theta + \partial_{yy}^2 \theta) \quad (7)$$

Onde Ra é o número de Rayleigh, Pr é o número de Prandtl e $\theta = (T - T_c)/(T_h - T_c)$

As equações adimensionalizadas foram discretizadas em Diferenças Finitas e um método de relaxação SOR, utilizando o *MATLAB* em uma grade a princípio 70x70, utilizando vários números de Rayleigh, utilizou-se um tamanho de cavidade de altura ($H=2$) e largura ($L=5$), as paredes superiores e inferiores são isotérmicas e as paredes laterais são adiabáticas.

Resultados Preliminares



A partir que se aumenta o número de Rayleigh, aumenta-se a instabilidade tornando o fluxo cada vez caótico no recinto

Figura 1: simulações para $\text{Ra}=100$ e $\text{Ra}=1000$

Conclusões

O fluxo de calor foi investigado numericamente em um recinto fechado retangular, induzido pela instabilidade de uma fonte de calor, as características do fluido foi relatada para os números de Rayleigh, onde a instabilidade aumenta a partir que vai se aumentando o mesmo, em consequência aumentando a taxa de fluxo de ar ambiente que entra pela cavidade, os resultados até aqui podem ser uteis para entender o crescimento da propagação do fogo, onde serão comparados com resultados experimentais.

Agradecimentos

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) 001.

Referências

MARKATOS N.C. , M.R. Malin. **Mathematical Modeling of Buoyancy-Induced Smoke Flow in Enclosures** int. J. Heat Mass Transfer, 25 (1982),pp. 63-75.

MARKATOS N.C., K.A. Pericleous. **An Investigation of Three-Dimensional Fires in Enclosures**, Rev. Gen. Thermiquel. ,23 (1984),pp. 66-78.

WANG S.J., A.S. Mujumdar. **A Comparative Study of Live Low Reynolds Number k- ϵ e Models for Impingement Heat Transfer** Appl Therm Eng., 25 (2005), pp 31-44.

DEFASAGEM EM MATEMÁTICA APRESENTADA POR ALUNOS DO CURSO TÉCNICO EM EDIFICAÇÕES (ETIM) NA DISCIPLINA ESMCC:UM CASO ISOLADO?

Viviane Fernandes Santos

Unicsul

contato_viviane@hotmail.com

Laura Marisa Carnielo Calejon

Unicsul

lauracalejon@gmail.com

Resumo: O trabalho apresentado resulta de um recorte, do projeto de pesquisa intitulado: “Análise da Defasagem em Matemática apresentada por alunos do Curso Técnico em Edificações (ETIM) na Disciplina ESMCC”, cujo interesse é analisar a Defasagem Matemática proveniente de conceitos matemáticos do Ensino Fundamental, em alunos ingressantes do Curso Técnico Profissionalizante de Edificações (ETIM), na Etec Itaquera II em São Paulo. A pesquisa nasce das inquietações da docente, que observa em alunos ingressantes do curso, defasagem matemática de conteúdos matemáticos prévios, que deveriam ser ensinados no Ensino Fundamental e são considerados pré-requisitos para a disciplina técnica Estudo dos Solos e Materiais de Construção Civil. A abordagem utilizada será de pesquisa qualitativa do tipo estudo de caso, que permitirá um aprofundamento em relação a defasagem matemática na turma de Ensino Médio Integrado do curso de Edificações, em 2019. O estudo utilizara a análise documental do programa da disciplina, para identificar os conceitos básicos que se constituem pré-requisitos para o conteúdo da disciplina e a criação de uma avaliação inicial diagnóstica, que analisará a desempenho dos alunos ingressantes em relação aos conceitos prévios da matemática. Com o estudo pretende-se demonstrar que o que falta para muitos alunos, são os conhecimentos de matemática básica, necessários para o avanço da aprendizagem das bases tecnológicas em que a matemática foi requisitada. Tais conhecimentos prévios deveriam ter sido construídos ao longo de sua trajetória escolar e acabaram defasados.

Palavras-chave: Defasagem Matemática, Ensino Fundamental, Matemática Básica.

Introdução

Considerada a grande vilã entre as disciplinas e campeã de reprovação, a matemática vem sendo rotulada ao longo dos anos. E no Ensino Fundamental que os alunos têm seus primeiros contatos com a matemática básica. Se a aprendizagem em matemática nessa fase for ineficiente, o aluno carrega um atraso ou defasagem de aprendizado ao longo de sua vida acadêmica.

Como professora de Ensino Médio Integral do Curso de Edificações, oferecido pelo Centro Paula Souza na Etec Itaquera II, venho sendo desafiada a encontrar a solução para esta situação. Desde 2013 lecionando a disciplina de Estudo dos Solos e Materiais de Construção (ESMCC), observo que as dificuldades apresentadas na disciplina, são decorrentes de dúvidas relacionadas a conhecimento precário ou defasagem de conceitos matemáticos ensinados nos anos anteriores da escolarização.

A *Defasagem de Aprendizagem* corresponde as dificuldades apresentados pelo discente na série que está cursando e que normalmente são avaliadas através de padrões de desempenho em avaliações externas (ALEIXO,2014).

A Defasagem no processo evolutivo preocupa não só os professores de matemática em diferentes segmentos da escolarização, mas outros professores e educadores desde o ensino fundamental até a graduação.

Assim, muitos alunos terminam o Ensino Fundamental e chegam ao Ensino Médio com uma grande defasagem no conhecimento da matemática Básica que serve como ferramenta para prosseguimento dos estudos durante o Ensino Médio (DA COSTA et al.,2017, p.639).

Gasparini, Kestring e Weber (2015) afirmam que alunos ingressos de cursos superiores apresentam grande defasagem nos conteúdos relacionados a matemática básica. Em relação Ensino Médio Técnico, Oliveira, De Andrade Paiva e Melo (2017), explicam que nos cursos dos Institutos Federal alunos ingressantes que possuem defasagem e deficiência de aprendizado de determinados conteúdos matemáticos, sentem dificuldade compreender os conteúdos apresentados nas disciplinas técnicas e até mesmo nas disciplinas voltadas ao ensino regular.

Materiais e Métodos

Inicialmente, será realizada uma exaustiva pesquisa bibliográfica sobre o tema em questão a fim de fornecer embasamento para o trabalho. O levantamento consiste na seleção e arquivamento das informações referentes a pesquisa em livros, revistas, jornais, teses, dissertações, anais, etc.

A metodologia será pesquisa qualitativa do tipo estudo de caso, que permitirá um aprofundamento em relação a defasagem matemática na turma de ETIM Edificações, em 2019. Será realizada análise documental do programa da disciplina, para identificar os conceitos básicos que se constituem pré-requisitos para o conteúdo da disciplina e após análise do currículo da disciplina, será criada uma avaliação inicial diagnóstica, que analisará a desempenho dos alunos ingressantes em relação aos conceitos prévios da matemática.

Conclusões

Com o estudo pretende-se demonstrar que o que falta para muitos alunos ingressantes, são conhecimentos prévios de matemática básica, necessários para o avanço da aprendizagem das bases tecnológicas. Tais conhecimentos prévios deveriam ter sido construídos ao longo de sua trajetória escolar e acabaram defasados.

Referências

ALEIXO, Roberta Eliane Gadelha. Defasagem de aprendizagem em matemática: o caso de uma escola estadual de educação profissional do estado do Ceará. Dissertação (mestrado profissional) -

Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação/CAEd. Programa de Pós-Graduação em Gestão e Avaliação da Educação Pública, 2014. 110 p.

DA COSTA, Jaqueline Gomides et al. Um olhar sobre as potencialidades de um curso de matemática básica para a diminuição das dificuldades na disciplina de matemática. In: **Anais Encontro Goiano de Educação Matemática**, v. 6, n. 6, p. 638-647, 2017

GASPARIN, Priscila Pigatto; KESTRING, Franciele Buss Frescki; WEBER, Pedro Elton.

Diagnóstico da proficiência de matemática em alunos ingressantes de engenharias e licenciaturas da Utfpr-Medianeira. In: SEMINÁRIO NACIONAL INTERDISCIPLINAR EM EXPERIÊNCIAS EDUCATIVAS,5., Francisco Beltrão,2015.

OLIVEIRA, Vinícius Augusto; PAIVA, Eleide Leile; MELO, Luciane Magda. Ensino de Matemática: uma análise das dificuldades apresentadas pelos alunos ingressantes no ensino médio integrado do IFTM. In: **Anais do Seminário de Pesquisa e Inovação Tecnológica-SEPIT**, v. 1, n. 1, 2017.

Multigrid Algébrico como preconditionador de métodos iterativos não estacionários para solução de sistemas lineares de grande porte

Henrique Gomes de Jesus

UFES

henrique.g.jesus@aluno.ufes.br

{Marcelo Torres Pereira Carrion, Maria Claudia Silva Boeres, Lucia Catabriga}

UFES

{mcarrion, boeres, luciac}@inf.ufes.br

Resumo: Este trabalho se destina à análise empírica do Método Multigrid Algébrico (AMG) como preconditionador do Método do Resíduo Mínimo Generalizado (GMRES). Os algoritmos são executados em diversas matrizes obtidas da coleção de matrizes da Universidade da Flórida¹, relacionadas a aplicações variadas. Os resultados numéricos são comparados aos do preconditionador *Successive Over Relaxation* (SOR) e aos do método sem preconditionador, mostrando que o uso do AMG como preconditionador, embora mais custoso computacionalmente, permite a convergência para mais matrizes.

Palavras-chave: Métodos Multigrid. Multigrid Algébrico. Métodos Iterativos. preconditionadores.

Introdução

Uma das desvantagens dos métodos iterativos em relação aos diretos é a possibilidade de não convergência, i.e., menor robustez. Porém, tanto a eficiência quanto a robustez podem ser melhoradas com o uso de preconditionamento, onde o sistema $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{F}$ se torna $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}$. Este novo sistema possui a mesma solução, porém, é mais fácil de resolver e exige menos iterações. Neste sistema, $\mathbf{M}$ é suficientemente semelhante à matriz original $\mathbf{A}$. Deste modo, todo produto matriz vetor $\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{z}$ do método iterativo pode ser solucionado através do sistema linear $\mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{z}$, utilizando para tal outro método de solução de sistemas lineares, tais como Gauss-Seidel ou SOR (CARRION, 2016).

Métodos clássicos de relaxação sofrem com a incapacidade de eliminar as componentes de baixa frequência do vetor erro. Os métodos multigrid corrigem este problema solucionando-o em discretizações sucessivamente mais grossas (geradas num processo chamado *setup*), aumentando assim a oscilação do erro, em um esquema chamado ciclo-V. Estes métodos, normalmente, podem ser divididos em dois tipos: O Multigrid Geométrico (GMG) se baseia no pressuposto de que o sistema é oriundo de uma discretização em malha, o que restringe o escopo de aplicação do multigrid; O AMG é uma generalização do GMG onde o conjunto de variáveis das malhas grossas é definido de forma puramente algébrica através da força das conexões entre as variáveis. Atualmente, o AMG se encontra dentre os métodos mais rápidos para várias classes de equações (SAAD, 2003).

Ao utilizar o AMG como preconditionador, em vez de uma única matriz de preconditionamento $\mathbf{M}$, utiliza-se as matrizes mais grossas produzidas pelo próprio *setup* do AMG ($\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots$). Estes novos sistemas lineares são solucionados através de uma relaxação clássica (neste trabalho, SOR). Assim, todo produto matriz vetor $\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{z}$ é calculado em um ciclo-V do AMG através de $\mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{z}$ (MCADAMS; SIFAKIS; TERAN, 2010).

Resultados Experimentais e Conclusões

Os algoritmos foram implementados em C, compilados com *gcc* versão 5.4.0 e executados em uma máquina com Intel® Xeon® E5410 2.33GHz $\times$ 4 64 bits com 32 GB de memória RAM e Ubuntu

¹<https://sparse.tamu.edu/>

16.04.10. Foram utilizadas várias matrizes obtidas da coleção de matrizes da Universidade da Flórida, relacionadas a aplicações diversas. A tolerância utilizada para o resíduo foi de 10^{-8} , o número máximo de iterações foi 1000, o número de vetores da base de Krylov para a reinicialização foi 20, o parâmetro ω , do SOR, foi 1.5, a profundidade do ciclo-V foi 1, o parâmetro utilizado para o *setup* do AMR ε_{str} foi 0.25 e o número de relaxações aplicadas em cada nível do multigrid foi igual a 2. A Tabela 1 apresenta a ordem e o número de elementos não nulos de 15 matrizes do repositório da Universidade da Flórida, além do número de iterações (Iter) e o tempo (t(s)), em segundos, utilizados por cada método. O símbolo † indica a não convergência do método.

Tabela 1: Número de iterações e tempo em segundos do GMRES

Matriz	Ordem	Não nulos	Sem Prec.		SOR		AMG	
			Iter.	t (s)	Iter.	t (s)	Iter.	t (s)
rail_5177	5.177	35.185	†	†	†	†	174	0,32
aft01	8.205	125.567	†	†	†	†	753	3,13
fem_3d_thermal1	17.880	430.740	269	0,63	249	1,83	12	0,23
dubcova2	65.025	1.030.225	†	†	817	18,97	48	4,51
H2O	67.024	2.216.736	†	†	427	19,23	26	6,01
fem_3d_thermal2	147.900	3.489.300	759	21,33	392	31,00	11	2,39
parabolic_fem	525.825	3.674.625	†	†	†	†	585	264,69
atmosmodd	1.270.432	8.814.880	†	†	222	73,44	44	43,81
atmosmodj	1.270.432	8.814.880	†	†	340	113,05	43	44,73
Serena	1.391.349	64.131.971	†	†	†	†	139	612,89
Geo_1438	1.437.960	60.236.322	†	†	†	†	197	838,55
atmosmodl	1.489.752	10.319.760	445	110,61	111	43,12	23	26,04
af_shell10	1.508.065	26.883.975	109	33,18	49	31,46	7	16,47
g3_circuit	1.585.478	4.623.152	†	†	†	†	326	284,71
Transport	1.602.111	23.487.281	†	†	†	†	561	1147,0

O método GMRES com o preconditionador AMG foi o único que convergiu para todas as matrizes, tendo obtido o menor número de iterações e menor tempo de CPU. Para todas as matrizes que convergiram com o preconditionador SOR, o número de iterações foi menor que o método sem preconditionador, mas o tempo de CPU foi maior para as matrizes fem_3d_thermal1 e fem_3d_thermal2, enquanto que para o preconditionador AMG o tempo de processamento também foi menor. Este fato é surpreendente, pois o *setup* do AMG é muito caro computacionalmente. Tal vantagem só ocorreu pois o número de iterações diminuiu drasticamente.

Matrizes de ordem acima de 1.000.000 foram solucionadas em menos de um minuto. Estes resultados mostram que, muito embora o AMG tenha a desvantagem de necessitar de um processo de *setup* consideravelmente oneroso, seu uso pode ser muito recompensador em matrizes de difícil convergência.

Referências

CARRION, M. T. P. **An Experimental Study of the Geometric and Algebraic Multigrid Strategies**. 2016. 63 f. Dissertação (Mestrado em Informática) — UFES, Vitória, 2016.

MCADAMS, A.; SIFAKIS, E.; TERAN, J. A parallel multigrid poisson solver for fluids simulation on large grids. In: EUROGRAPHICS ASSOCIATION. **Proceedings of the 2010 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation**. [S.l.], 2010. p. 65–74.

SAAD, Y. **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**. Minneapolis: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

Métricas de Redes Complexas Combinadas para Descoberta de Relacionamentos em Redes de Informação

Henrique Monteiro Cristovão

Universidade Federal do Espírito Santo

henrique.cristovao@ufes.br

Jorge Henrique Cabral Fernandes

Universidade de Brasília

jhcf@unb.br

Resumo: A Ciência das Redes, nascida da Teoria dos Grafos na Matemática, é uma área interdisciplinar muito ampla, recente, com aplicações e contribuições em vários campos do conhecimento. Uma de suas vertentes, a análise de redes complexas, permite a descoberta de relações, configurações topológicas, nós com determinadas propriedades em relação ao restante da rede e, sobretudo, a revelação de fenômenos que antes não eram aparentes. A análise de redes complexas é fortemente auxiliada pelo cálculo de métricas cujos valores representam a importância dos seus nós e suas relações. Os dados ligados na Web Semântica são exemplo de rede de informação e rede complexa cuja recuperação de informações ainda é um campo a ser amadurecido. A descoberta de relacionamentos em uma rede de informação pode ser feita pela classificação e seleção de nós cuja importância levem a relacionamentos mais significativos para o usuário. Nesse contexto, o presente trabalho apresenta o uso de métricas de rede complexas combinadas para a descoberta de relacionamentos em uma rede de informação e a sua apresentação no formato de mapas conceituais. Após os experimentos realizados e análise dos dados, observou-se que a combinação dos cálculos das métricas foi determinante para obtenção de relacionamentos diferenciados possibilitando a aproximação da necessidade informacional do usuário.

Palavras-chave: Métrica de rede complexa. Análise de rede complexa. Rede de informação. Web semântica. Dados ligados. Mapa Conceitual.

Introdução

Leonard Euler, matemático suíço, em 1736 iniciou uma área de estudos na Matemática, conhecida depois por Teoria dos Grafos que, mais adiante e fazendo interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento, como as Ciências Sociais Aplicadas, concebeu a Ciência das Redes, ou *Network Science*. Essa ciência tenta compreender as redes emergentes na natureza, na tecnologia e na sociedade através de um conjunto de ferramentas e princípios (BARABÁSI, 2013). Uma rede é uma coleção de pontos, chamados também de nós ou vértices, conectados em pares através de linhas, chamadas de ligações ou arestas (NEWMAN, 2010), e representadas por meio de um grafo onde informações adicionais podem ser colocadas em seus vértices e arestas que, apesar de importantes, são irrelevantes para determinar a estrutura da rede, porque esta depende apenas do padrão de suas ligações (NOOY; MRVAR; BATAGELJ, 2011). Uma rede complexa descreve uma ampla variedade de sistemas na natureza e na sociedade (ALBERT; BARABÁSI, 2002), sendo um grafo normalmente modelado a partir de sistemas reais, que apresenta características topológicas não triviais como as redes tecnológicas, de conhecimento, biológicas e as sociais.

A Web Semântica é extensão do atual modelo de web¹, onde a informação é associada a um significado e disponibilizada para acesso e trabalho conjunto entre computadores e pessoas (BERNERS-LEE *et al.*, 2001). Também denominada de web de dados, ela representa uma grande mudança na forma de organizar e recuperar informação na web. Enquanto a atual web de documentos conecta páginas, ou documentos, a web de dados conecta dados permitindo que as buscas sejam mais precisas uma vez que esses dados possuem anotações semânticas e permitem a sua leitura por

¹ Web é abreviatura universalmente usada para World Wide Web.

intermédio de máquinas. O termo dados ligados, ou *Linked Data*², refere-se ao uso da web para criar links entre dados de fontes diferentes. Segundo Health e Bizer (2011), dados ligados dizem respeito a um conjunto de melhores práticas para a publicação, compartilhamento e ligação de dados, informações e conhecimento sobre a web. Os dados ligados, que são constituídos por triplas RDFs³, são um exemplo de rede de informação na Web Semântica.

A recuperação de informação em dados ligados ainda é um campo de pesquisa incipiente e com trabalhos em desenvolvimento (CRISTOVÃO; FERNANDES, 2018). Existem linguagens de busca para dados ligados, tal como a SPARQL⁴, mas ainda limitadas e distantes do usuário final. Cristovao (2016) desenvolveu um modelo e um protótipo para um sistema de recuperação de informação em bases de dados ligados que se utiliza de métricas de redes complexas para a classificação de nós e relacionamentos que levem a descoberta de ligações, diretas ou indiretas, entre os conceitos inicialmente fornecidos, para atender uma necessidade informacional do usuário. Nos experimentos realizados, a utilização isolada das métricas de redes complexas, não trouxe resultados que se aproximavam da necessidade informacional do usuário. A combinação de métricas incorporadas em algoritmos foi sinalizada como uma solução para melhoria da recuperação de informações. Dessa forma, o presente trabalho apresenta combinações de métricas para melhoria da classificação de nós e relacionamentos em uma rede de informação que foram desenvolvidos no trabalho de Cristovao (2016).

Análise de redes complexas por meio de métricas

A análise de redes complexas é uma área de estudo que auxilia a compreensão de fenômenos de uma rede não trivial e possui forte ligação com a área denominada de análise de redes sociais (ARS). Segundo Wasserman e Faust (1994), ARS é o estudo aplicável a redes cujos nós são entidades sociais. Porém, esse campo de estudo pode ser aplicado a redes cujos nós tenham uma origem diferente de uma entidade social tal como ocorrem com as redes de informações (NEWMAN, 2010). As pesquisas em redes complexas estão, cada vez mais, revelando o quão as ideias estão conectadas, isto é, descobertas na Biologia, na Ciência da Computação, na Sociologia e na Física podem estar intimamente conectadas (BUCHANAN, 2002). Os métodos e técnicas da ARS agora estão em amplo uso na análise de redes nas mais diversas áreas do conhecimento (NEWMAN, 2010). Observa-se que mesmo para a análise de redes complexas, que investiga redes mais abrangentes do que da análise de redes sociais, é vantajoso estudar os métodos da ARS com grandes possibilidades de generalizar seus resultados.

Os fenômenos que ocorrem em uma rede não dependem predominantemente das características intrínsecas, chamadas de atributos, de seus nós (FRANCO, 2012), mas de toda a formação topológica da rede. Do mesmo modo, uma rede não se reduz a uma simples soma de suas relações, pois sua forma topológica exerce uma influência sobre essas relações (DEGENNE; FORSE, 1994 apud MARTELETO, 2001). De fato, segundo Kadushin (2004), as teorias fundadoras da ARS é uma das poucas, senão a única teoria das ciências sociais que não é reducionista. Ou seja, as redes devem ser analisadas como um todo, pois as propriedades de suas partes não necessariamente explicam o todo.

A inspeção visual de redes de forma exploratória é muito útil, pois permite a visualização imediata de características estruturais importantes. Contudo, a exploração de uma rede por meio de cálculo de métricas é muito mais concisa e precisa do que uma inspeção visual, apesar de ser para alguns casos, é abstrata e de difícil interpretação (NOOY; MRVAR; BATAGELJ, 2011). Cientistas de uma grande variedade de campos de estudo, ao longo dos anos, desenvolveram um extenso conjunto de ferramentas de matemática, computação e estatística, para análise, modelagem e entendimento das redes (NEWMAN, 2010).

² *Linked Data* é conceituado em: <<http://linkeddata.org/>>.

³ RDF: Resource Description Framework, é uma linguagem para representação de triplas formadas por subject-predicate-object na Web Semântica.

⁴ SPARQL é uma linguagem de consulta em Linked Data, derivada da linguagem SQL de consulta a bancos de dados. Especificação disponível em <<https://www.w3.org/TR/sparql11-query/>>.

Através da análise da estrutura de uma rede, pode-se calcular uma variedade de medidas úteis que representam especificidades de sua topologia (NEWMAN, 2010). Uma métrica é formada por um conjunto de medidas realizadas ao longo do tempo ou por intermédio do processamento de um algoritmo. Medidas ou métricas de rede permitem identificar e quantificar a importância de um nó ou um grupo de nós em uma rede. Nos próximos parágrafos são apresentadas as métricas e conceitos, encontrados em Newman (2010), que fundamentam a presente pesquisa.

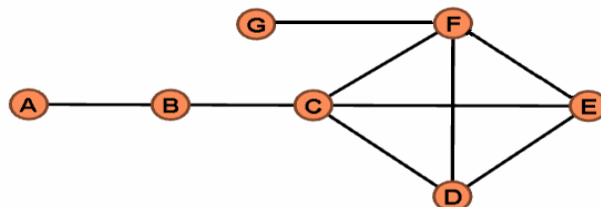


Figura 1 – Exemplo de rede

Uma forma de representação de redes complexas é a matriz de adjacência com n linhas e n colunas, onde n é a quantidade de vértices da rede. Considerando a matriz de adjacência com o nome de A , então A_{ij} é igual ao número de ligações existentes entre os vértices i e j . Dessa forma, a rede não direcionada da Figura 1 é representada pela matriz adjacência da Figura 2.

—	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	0	0	0	0	0
B	1	0	1	0	0	0	0
C	0	1	0	1	1	1	0
D	0	0	1	0	1	1	0
E	0	0	1	1	0	1	0
F	0	0	1	1	1	0	1
G	0	0	0	0	0	1	0

Figura 2 – Matriz adjacência

A métrica centralidade de grau, ou *degree centrality*, estabelece que a importância de um nó está no número de ligações que ele possui. Assim, a *degree centrality* do i -ésimo nó de uma rede formada por n nós, denominada de G_i , é determinada pela Equação 1. Dessa forma, o nó A da rede da Figura 1 possui grau 1, enquanto o nó C possui grau 4.

$$G_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \quad (1)$$

A distância entre dois nós da rede é a menor quantidade de ligações que existem entre esses dois nós. A distância também é chamada de caminho mínimo, caminho geodésico ou *shortest path length*. Dessa forma, a distância entre os nós 'C' e 'G', da rede exemplo da Figura 1, possui valor igual a 2, apesar de existirem outros caminhos maiores entre os dois nós.

A média das distâncias, ou *average path length*, é a média de todos os caminhos mínimos possíveis entre todos os pares de nós distintos da rede. Essa medida é útil para saber o quão próximo ou distante os nós estão um dos outros. A rede da Figura 1 possui média das distâncias igual a 2.

Componente conectado, ou *connected component*, é um subconjunto de nós de uma rede formado por todos os nós que estão ligados entre si por algum caminho.

Um k -core é uma subrede formada pelo subconjunto maximal de todos os nós de uma rede, e suas correspondentes arestas, que apresentam grau superior a k . Assim, ao aplicar um k -core igual a 3 na rede da Figura 1, obtém-se uma subrede formada pelos nós 'C', 'D', 'E' e 'F'.

A métrica centralidade de intermediação, ou *betweenness centrality*, mede a importância de um nó quanto à sua capacidade de intermediar o fluxo com os demais nós. Assim, o *betweenness centrality*, do i -ésimo nó de uma rede formada por n nós, denominada de B_i , com σ_{st} representando a quantidade de caminhos geodésicos entre os nós s e t , e $\sigma_{st}(i)$ representando a quantidade de caminhos geodésicos entre os nós s e t que passam pelo nó i , é determinada pela Equação 2. Os nós de maior *betweenness centrality* na rede da Figura 1 são, em ordem decrescente, 'C', 'F', 'B', 'D', e os de menor valor, empatados, 'A', 'E', 'G'.

$$B_i = \sum_{s \neq t \neq i}^n \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}} \quad (2)$$

A métrica centralidade de proximidade, ou *closeness centrality*, mede a importância de um nó quanto à proximidade dele em relação a todos os outros nós da rede. Assim, o *closeness centrality* do i -ésimo nó de uma rede formada por n nós, denominada de C_i , com d_{ij} representando a distância geodésica entre os nós i e j , é determinada pela Equação 3. Os nós de maior *closeness centrality* na rede da Figura 1 são ‘C’, ‘F’, e depois, em ordem decrescente, ‘D’, ‘B’, ‘E’, ‘G’, ‘A’.

$$C_i = \frac{n}{\sum_{j=1}^n d_{ij}} \quad (3)$$

A métrica centralidade de vetor próprio, ou *eigenvector centrality*, mede a importância de um nó quanto à quantidade de nós, e suas importâncias, que o referenciam. Assim, o *eigenvector centrality* do i -ésimo nó de uma rede formada por n nós, denominada de E_i , com grau k_i , e γ como constante arbitrária, é determinada pela Equação 4. Os nós de maior *eigenvector centrality* na rede da Figura 1 são, em ordem decrescente, ‘F’, ‘D’, ‘C’, ‘E’, ‘G’, ‘B’, ‘A’.

$$E_i = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^n A_{ij} E_j \quad (4)$$

A medida de excentricidade, ou *eccentricity*, informa o quanto um determinado nó é excêntrico em relação ao centro de uma rede, ou seja, quanto maior é a distância dele ao centro da rede, maior é a sua excentricidade. Assim, a *eccentricity* do i -ésimo nó de uma rede formada por n nós, denominada de EC_i , é determinada pela Equação 5. Os nós de maior *eccentricity* na rede da Figura 1 são ‘E’, ‘G’, ‘A’, seguidos dos nós ‘E’, ‘D’, ‘B’, sendo o de menor valor p nó ‘C’

$$EC_i = \frac{1}{\max_{1 \leq j \leq n} dist_{ij}} \quad (5)$$

Metodologia e experimento

Com base no método de pesquisa exploratório com a investigação de relações entre conceitos da rede de informação DBpedia⁵ por intermédio do software Gephi⁶, a presente pesquisa experimentou a combinação de várias métricas de redes complexas. O objetivo era fazer a seleção e ranqueamento de nós e ligações que pudessem trazer, após a execução do algoritmo de recuperação, resultados de relacionamentos pertinentes no contexto dos termos de busca fornecidos pelo usuário.

Uma execução do protótipo do modelo desenvolvido consiste nos seguintes passos: (i) recebimento de um conjunto de termos do usuário que tem como necessidade informacional a descoberta de relacionamentos entre eles; (ii) geração da primeira rede de informação, com resultados provenientes de consulta dos termos do usuário nos dados ligados da DBpedia, sendo que em grande parte das vezes essa primeira rede é formada por um *connected component* para cada termo, isto é, os termos não são inicialmente conectados; (iii) a partir do ranqueamento e seleção de termos importantes, outra busca é realizada na base de dados ligados e o resultado é integrado na rede inicial - esse processo de ampliação da rede continua até que ocorra apenas um *connected component* e com um tamanho predeterminado da rede; (iv) a rede sofre um processo de redução, também por intermédio de métricas que fazem o ranqueamento e seleção de nós menos importantes para serem descartados e com auxílio de algoritmos como o *k-core*; (v) a rede de informação resultante é apresentada ao usuário em formato de mapa conceitual.

⁵ DBpedia: é uma base de conhecimento em dados ligados, disponível em <<https://wiki.dbpedia.org/>>, que são provenientes da enciclopédia Wikipedia, disponível em <<https://www.wikipedia.org/>>.

⁶ Gephi, é um software de código aberto para análise e visualização de redes, disponível em <<https://gephi.org>>.

Os experimentos foram realizados utilizando-se, primeiramente, conjuntos controlados de termos elaborados pelo autor dessa pesquisa e, posteriormente, com 34 conjuntos de termos fornecidos por 17 usuários. Ao longo dos experimentos a observação dos resultados em função dos termos inicialmente fornecidos foi feita com o intuito de encontrar uma combinação de métricas para a descoberta de relacionamentos entre os conceitos.

Resultados e discussão

O crescimento da rede até a formação de único *connected component* evidencia relacionamentos diversos entre os termos originais. A Figura 3 mostra um estágio de crescimento da rede, com 2854 nós e 3024 ligações, após aplicação de algoritmos de distribuição, e destaca os dois termos fornecidos pelo usuário, Language e Knowledge e outros termos que foram descobertos e apresentados nos mapas conceituais finais, Figuras 4 e 5. Essa rede foi formada com o ranqueamento e seleção dos nós pela combinação das métricas *betweenness centrality*, *closeness centrality* e *eigenvector centrality*.

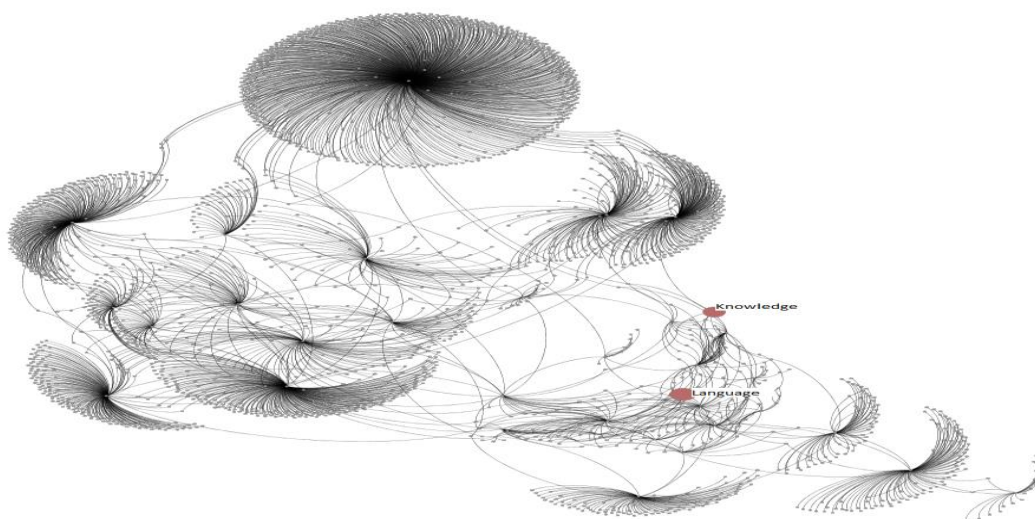


Figura 3 – Rede de informação obtida a partir dos termos Language e Knowledge

Em seguida foi processado o algoritmo de redução da rede da Figura 3 usando-se *k-core* igual a 2 e resultados da métrica *eccentricity* para eliminar em ordem decrescente os nós com menor importância até a obtenção da rede da Figura 4, já exibida em formato de mapa conceitual. Nessa rede foi atribuído peso maior na combinação *betweenness* e *closeness centrality* do que na métrica *eigenvector centrality*.

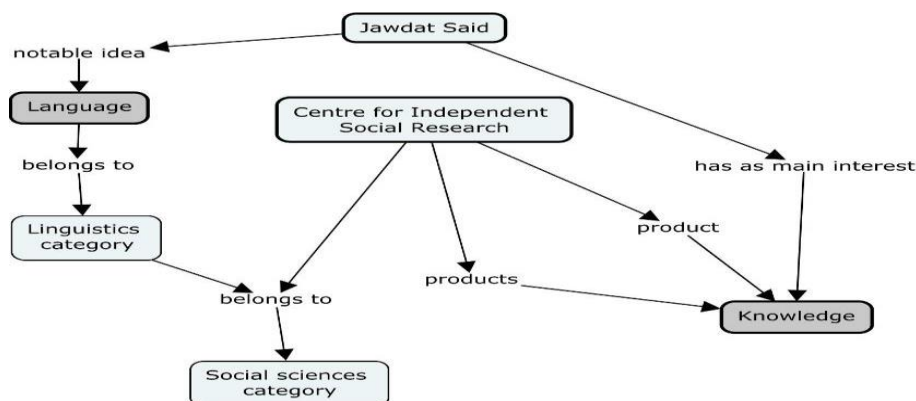


Figura 4 – Rede de informação resultante dos termos ‘Language’ e ‘Knowledge’ e processada por combinação das métricas – versão A

A Figura 5 apresenta outro teste para o mesmo conjunto de termos, porém com peso maior na métrica *eigenvector centrality* em comparação com a combinação de métricas *betweenness* e *closeness centrality*. Nessa rede também houve o processamento da redução por intermédio de *k-core* igual a 2 e a métrica *eccentricity*.

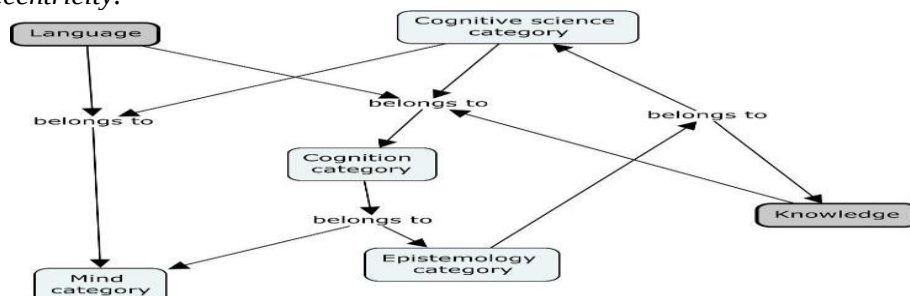


Figura 5 – Rede de informação oriunda dos termos ‘Language’ e ‘Knowledge’ e processada por combinação de métricas – versão B

Observou-se ao longo dos experimentos que as redes de informação finais tendiam para dois polos: (i) relacionamentos com conceitos intermediários categorizados como individuais, segundo a Teoria do Conceito de Dahlberg (1978), que representam instâncias diretas tais como nomes de pessoas, de universidades; ou (ii) relacionamentos com conceitos gerais que, segundo Dahlberg, seriam como classes que representam um grupo de conceitos individuais, como no caso de conceitos do tipo *category*. O caso onde predominaram os conceitos individuais acontecia quando o peso das métricas *betweenness* e *closeness centrality* era maior, e o caso com maior número de conceitos gerais ocorria quando *eigenvector* era maior. Esses dois polos podem ser observados nas redes de informação das Figuras 4 e 5. O peso maior para *eigenvector centrality* fez aparecer conceitos mais gerais como as categorias de áreas do conhecimento. Por outro lado, o peso maior para *betweenness* e *closeness centrality* revelaram conceitos individuais, como ‘Jawdat Said’ e ‘Centre for Independent Social Research’.

Uma possibilidade de explicação desse fenômeno é que a métrica *eigenvector centrality* encontra *hubs* com mais facilidade, sendo esses conceitos mais gerais por estarem ligados a tantos outros nós, enquanto a combinação *betweenness* e *closeness centrality* encontra elementos de intermediação que estão próximos ao centro, isto é, elementos que nem sempre possuem muitas conexões.

Conclusões

Cada uma das métricas de redes complexas possui potencial para destacar a importância de um nó ou um conjunto de nós sob um determinado aspecto e que também é variável em função da topologia da rede. Contudo, a combinação delas potencializa as possibilidades de resultados na seleção de nós e relacionamentos de uma rede complexa. No presente trabalho foram utilizadas, de forma combinada, as métricas *betweenness centrality*, *closeness centrality*, *eigenvector centrality* e *eccentricity*. Foram também utilizados os algoritmos para processar *k-core* e verificar quantidade de *connected componente* da rede.

A partir dos experimentos realizados e resultados obtidos recomenda-se, como trabalho futuro para o modelo de recuperação de informação, que o usuário possa participar de forma interativa nas escolhas das métricas, inclusive outras não tratadas aqui nessa pesquisa, possíveis combinações e os seus pesos no algoritmo. Assim, será possível a descoberta de outros relacionamentos na rede e, possivelmente, haverá aproximação do resultado da recuperação de informação com o desejo e necessidade informacional do usuário.

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ).

Referências

ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics*, v. 74, n. 1, p. 47, 2002. Disponível em: <<http://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.74.47>>. Acesso em: 1 out. 2018.

BARABÁSI, A.-L. Network science. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 371, n. 1987, p. 20120375–20120375, 18 fev. 2013. Disponível em: <<http://rsta.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rsta.2012.0375>>. Acesso em: 1 out. 2018.

BARABÁSI, A.-L. *Network science: graph theory*. Web page: Barabasi site, 2014. Disponível em: <<http://barabasi.com/f/625.pdf>>. Acesso em: 1 out 2018.

BERNERS-LEE, T. *et al.* The semantic web. *Scientific american*, v. 284, n. 5, p. 28–37, 2001. Disponível em: <https://www-sop.inria.fr/acacia/cours/essi2006/Scientific%20American_%20Feature%20Article_%20The%20Semantic%20Web_%20May%202001.pdf>. Acesso em: 1 out 2018.

BUCHANAN, M. *Nexus: small worlds and the groundbreaking science of networks*. New York: W W Norton & Company, 2002.

CRISTOVÃO, H. M. *Um modelo híbrido de recuperação de informação e conhecimento baseado na síntese de mapas conceituais obtidos por operações de transformação de redes complexas orientadas por busca de relacionamentos entre termos de consulta em bases de dados ligados*. 2016. 320 f. Tese (Doutorado em Ciência da Informação) - Programa de Pós-graduação em Ciência da Informação da Faculdade de Ciência da Informação da Universidade de Brasília, Brasília, 2016. Disponível em: <<http://repositorio.unb.br/handle/10482/22284>>. Acesso em: 1 out 2018.

CRISTOVÃO, H. M.; FERNANDES, J. H. C. Recuperação de informação em dados ligados: um modelo baseado em mapas conceituais e análise de redes complexas. *Transinformação*, v. 30, n. 2, p. 193–207, ago. 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/2318-08892018000200005>>. Acesso em: 1 out 2018.

DAHLBERG, I. Teoria do conceito. *Ciência da informação*, v. 7, n. 2, 1978. Disponível em: <<http://revista.ibict.br/index.php/ciinf/article/viewArticle/1680>>. Acesso em: 1 out 2018.

FRANCO, A. DE. *A rede*. São Paulo: Escola de Redes, 2012. Disponível em: <<http://pt.slideshare.net/augustodefranco/fluzz-srie-completa>>. Acesso em: 1 out 2018.

HEATH, T.; BIZER, C. Linked data: evolving the web into a global data space. *Synthesis Lectures on the Semantic Web: Theory and Technology*, v. 1, n. 1, p. 1–136, 9 fev. 2011. Disponível em: <<http://www.morganclaypool.com/doi/abs/10.2200/S00334ED1V01Y201102WBE001>>. Acesso em: 1 out 2018.

KADUSHIN, C. Introduction to social network theory. *Boston, MA*, 2004. Disponível em: <<http://melander335.wdfiles.com/local--files/reading-history/kadushin.pdf>>. Acesso em: 1 out 2018.

MARTELETO, R. M. Análise de redes sociais – aplicação nos estudos de transferência da informação. *Ciência da Informação*, v. 30, n. 1, 12 jun. 2001. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ci/v30n1/a09v30n1.pdf>>.

NEWMAN, M. E. J. *Networks: an introduction*. Oxford ; New York: Oxford University Press, 2010.

NOOY, W. DE; MRVAR, A.; BATAGELJ, V. *Exploratory social network analysis with Pajek*. Rev. and expanded 2nd ed ed. England ; New York: Cambridge University Press, 2011. (Structural analysis in the social sciences, 34).

WASSERMAN, S.; FAUST, K. *Social network analysis: methods and applications*. Cambridge, England; New York: Cambridge University Press, 1994.